

Wärmeübergang im laminaren Wandstrahl

Franz Peters

Ruhr-Universität Bochum, Institut für Thermo- u. Fluidodynamik, Universitätsstraße 150, 44801 Bochum

Wärmeübergang, Wandstrahl, Ähnlichkeitslösung
Heat transfer, Wall jet, Similarity solution

Zusammenfassung

Die Ähnlichkeitslösung der Temperaturgrenzschicht im laminaren Wandstrahl wird hergeleitet. Daraus folgt der Wärmeübergang von der Wand an die Strömung unter Berücksichtigung des virtuellen und des realen Ursprungs der Strömung. Experimente an einem längs angeströmten Zylinder bestätigen die wesentlichen Eigenschaften der Lösung qualitativ und quantitativ.

Einleitung

Plattenströmung, Freistrah und *Wandstrahl* bilden eine Familie von Ähnlichkeitslösungen basierend auf Prandtl's Grenzschichtgleichungen, s. Abb.1. In [1] wurden die Lösungen neu gruppiert und Geschwindigkeitsmessungen zum laminaren Wandstrahl vorgelegt. Hier fallen, anders als im Fall der Platte realer und virtueller Ursprung nicht zusammen. Letzterer ist nicht fixiert; er wandert mit den Strömungsbedingungen. Diese Tatsache wird in der Theorie [1] berücksichtigt. In der vorliegenden Arbeit wird die Wandstrahlösung der Geschwindigkeit um die zugehörige Lösung der Temperaturgrenzschicht bei konstanter Wandtemperatur erweitert. Die Analyse bezieht sich auf einen laminaren Strahl, der mit Umgebungstemperatur aus einem engen, konzentrischen Spalt austritt und einen geheizten Zylinder in Längsrichtung umströmt wie in Abb.4 dargestellt.

Das parabolische Austrittsprofil entwickelt sich in eine Grenzschichtströmung mit Störungen am äußeren Rand, die sich in Strömungsrichtung verstärken. Dabei bleibt die Reynoldszahl am Zylinder unterhalb von $6 \cdot 10^5$. (Die Sichtbarmachung dieses Verhaltens findet sich in [1]). Der konvektive Wärmetransport wird durch die ungestörte laminare Unterschicht maßgeblich bestimmt. Das legt nahe zu untersuchen, ob die laminare Grenzschichtlösung empirische Wärmeübertragungsdaten repräsentieren kann.

Diese Arbeit gliedert sich folgendermaßen. Der theoretische Teil leitet die Lösung der Temperaturgrenzschicht des Wandstrahls unter Berücksichtigung des virtuellen Ursprungs und der Strömungslösung [1] her. Das Ergebnis wird in Form des Wärmeübergangs an einem längs angeströmten Zylinder dargestellt. Das hier genutzte Experiment wird beschrieben und Messergebnisse werden mit der Theorie verglichen.

Theorie

Ähnlichkeitslösung der Strömung des Wandstrahls

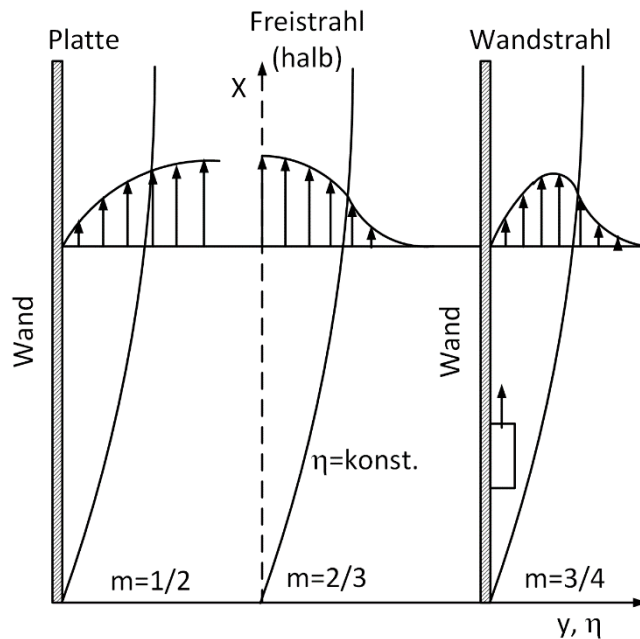


Abb.1: Drei verwandte Ähnlichkeitslösungen. Angedeutete Geschwindigkeitsprofile und Ähnlichkeitskoordinaten.

Die Ähnlichkeitskoordinate η schreibt sich als Funktion der realen Koordinaten x und y mit m aus Abb.1 in der Form

$$\eta = \frac{y}{g(x)} = \frac{y}{(\nu/U_\infty)^{1-m} x^m} \quad (1)$$

Die aus den Grenzschichtgleichungen resultierende gewöhnlich DGL mit der Stromfunktion f

$$C \frac{2m-1}{m} f'^2 + C \frac{1-m}{m} f f'' + f''' = 0 \quad (2)$$

beinhaltet die Geschwindigkeitskomponenten u und v

$$u = \frac{C \nu}{\left(\frac{\nu}{U_\infty}\right)^{2-2m} m x^{2m-1}} f'(\eta) \quad (3)$$

$$v = \frac{C \nu}{\left(\frac{\nu}{U_\infty}\right)^{1-m} m x^m} [m \eta f' - (1-m)f] \quad (4)$$

Die Konstante C hat für die Platte den festen Wert $\frac{1}{2}$, weil die Vorderkante für jedes Verhältnis ν/U_∞ (kinematische Viskosität / Anströmgeschwindigkeit) der Koordinatenursprung ist. In den beiden anderen Fällen ist C nicht universell. Das bedeutet, dass die reale Quelle (Düse) nicht identisch mit dem virtuellen Ursprung sein kann. C muss für jede experimentelle Situation neu bestimmt werden.

Anders als im Fall der Platte erlaubt der Wandstrahl folgende analytische Lösungen [1]

$$\eta \sqrt{C} = 3\kappa \left[\ln \frac{\sqrt{f\sqrt{C}\kappa} + \sqrt{f\sqrt{C}\kappa+1}}{1 - \sqrt{f\sqrt{C}\kappa}} + \sqrt{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}\sqrt{f\sqrt{C}\kappa}}{2 + \sqrt{f\sqrt{C}\kappa}} \right] \quad (5)$$

$$f' = \frac{2}{9} \sqrt{f\sqrt{C}} \left[\kappa^{-3/2} - \left(\sqrt{f\sqrt{C}} \right)^3 \right] \quad (6)$$

$$f'' = \sqrt{C} \left(\kappa^{-3/2} \sqrt{f\sqrt{C}} - f^2 C \right) \frac{2}{81} \left[\frac{1}{\kappa^{3/2} \sqrt{f\sqrt{C}}} - 4f\sqrt{C} \right] \quad (7)$$

Gl.(5) ist implizit in der Stromfunktion aber f' und f'' sind explizit verfügbar. Abb.2 zeigt $f\sqrt{C}$ und f' als Funktion von $\eta\sqrt{C}$ mit folgenden wichtigen Eigenschaften. Das Geschwindigkeitsmaximum $f' = 1$ liegt vor bei

$$\eta_{max}\sqrt{C} = 1.972 \quad (8)$$

wo

$$f_{max}\sqrt{C} = \sqrt{3/2} \quad (9)$$

$f\sqrt{C}$ konvergiert für $\eta \rightarrow \infty$ gegen

$$f_{\infty}\sqrt{C} = \frac{1}{\kappa} = 3.086 \quad (10)$$

und die Ableitung von f' an der Wand hat den universellen Wert

$$f''(\eta\sqrt{C} = 0) = 0.7256 \quad (11)$$

Für numerische Zwecke ist es hilfreich $f\sqrt{C}$ mit einer Funktion anzunähern um f and f' explizit als Funktion von $\bar{\eta} = \eta\sqrt{C}$ schreiben zu können. Gl.(12) erfüllt die Aufgabe sehr gut bis zu $\bar{\eta} = \eta\sqrt{C} = 5.54$ wo $f\sqrt{C}(\bar{\eta}) = 3.0$, wodurch das Maximum geringfügig verfehlt wird.

$$f\sqrt{C}(\bar{\eta}) = -0.0009921 \bar{\eta}^6 + 0.017023 \bar{\eta}^5 - 0.098441 \bar{\eta}^4 + 0.164387 \bar{\eta}^3 + 0.242910 \bar{\eta}^2 + 0.030085 \bar{\eta} \quad (12)$$

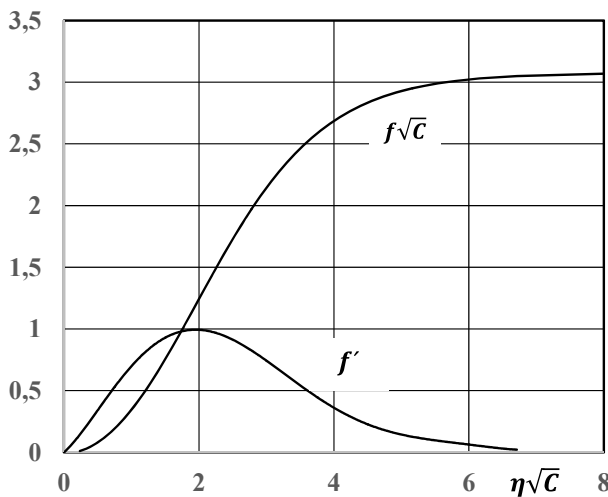


Abb.2: Die analytische Lösung der Stromfunktion $f\sqrt{C}$ und der Geschwindigkeit f' des Wandstrahls.

Ähnlichkeitslösung der Temperatur des Wandstrahls

Wie in [2] beschrieben sind die Grenzschichtgleichungen für Impuls und Temperatur analog, also für die Temperatur

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (13)$$

mit den Geschwindigkeiten u und v und der Temperaturleitfähigkeit a . Die resultierende DGL der Temperatur der Platte lautet nach Pohlhausen [2]

$$T'' + \frac{Pr}{2} f T' = 0 \quad (14)$$

Im Fall des Wandstrahls haben wir mit $m = 3/4$

$$\eta = \frac{y}{g(x)} = \frac{y}{(v/U_\infty)^{1/4} x^{3/4}} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{3\eta}{4x} \quad (16)$$

Beachten wir, dass T auf $\eta = \text{const.}$ im Sinne der Ähnlichkeit konstant sein soll, so lauten die partiellen Differentiale

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{3\eta}{4x} \quad (17a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{1}{g} \quad (17b)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{g^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \quad (17c)$$

und die Geschwindigkeiten nach Gln.(3,4)

$$u = \frac{4 C v}{3 \left(\frac{vx}{U_\infty}\right)^{1/2}} f'(\eta) = \frac{4 C v}{3 g^2} x^{1/4} f'(\eta) \quad (18)$$

$$v = \frac{C v}{\left(\frac{vx}{U_\infty}\right)^{1/4} x^{1/2}} \left[\eta f' - \frac{1}{3} f \right] = \frac{C v}{g} \left[\eta f' - \frac{1}{3} f \right] \quad (19)$$

Diese Zwischenergebnisse und $f\sqrt{C}$ aus Gl.(12) eingesetzt in Gl.(13) führen auf Gl.(20)

$$\frac{d^2 T}{d(\eta\sqrt{C})^2} + \frac{Pr}{3} (f\sqrt{C}) \frac{dT}{d(\eta\sqrt{C})} = 0 \quad (20)$$

Das Ergebnis weicht in zwei Eigenschaften von der Plattenlösung ab. Der Faktor des zweiten Terms ist $1/3$ anstatt $1/2$ und die Lösungskordinate beinhaltet den Faktor C . Mit T_w an der Wand und T_∞ in der Umgebung schreibt sich die dimensionslose Temperatur Θ

$$\Theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (21)$$

Mit folgenden Randbedingungen ist dann Gl.(23) an der Wand zu lösen

$$\Theta = 1 \text{ bei } \eta = 0$$

$$\Theta = 0 \text{ bei } \eta = \infty \quad (22)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d(\eta\sqrt{C})^2} + \frac{Pr}{3} (f\sqrt{C}) \frac{d\Theta}{d(\eta\sqrt{C})} = 0 \quad (23)$$

Mit der Lösung $f\sqrt{C}$ von Gl.(12) findet man numerisch an der Wand für e.g. $Pr=0.7$

$$\left. \frac{d\Theta}{d(\eta\sqrt{C})} \right|_w = -0.304 \quad (24)$$

Fig.3 zeigt den Wandgradienten für Prandtlzahlen zwischen 0.6 und 7. Die berechneten Punkte lassen sich annähern durch

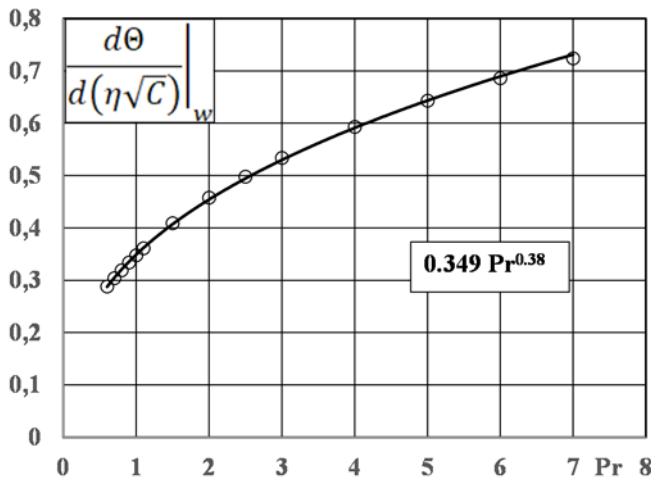


Abb.3: Der Wandgradient der normalisierten Temperatur als Funktion von Prandtlzahlen zwischen 0.6 und 7, berechnet nach Gl.(23). Die Linie wurde mit Gl.(25) an die berechneten Punkte angepasst.

$$\left. \frac{d\theta}{d(\eta\sqrt{C})} \right|_w = -0.349 Pr^{0.38} \quad (25)$$

Der flächenspezifische Wärmestrom \dot{q} an der Wand ($\eta = 0$) mit der Wärmeleitfähigkeit λ von Luft folgt Fick's Gesetz

$$\dot{q} = -\lambda \frac{\partial\theta}{\partial y} (T_w - T_\infty) = -\lambda \left. \frac{\partial\theta}{\partial(\eta\sqrt{C})} \right|_w \frac{(T_w - T_\infty)\sqrt{C}}{(\nu/U_\infty)^{1/4} x^{3/4}} \quad (26)$$

Die Integration dieser Gleichung und die Rolle von C werden im Zusammenhang mit den Experimenten erörtert.

Anpassung von Gl.(26) an experimentelle Bedingungen

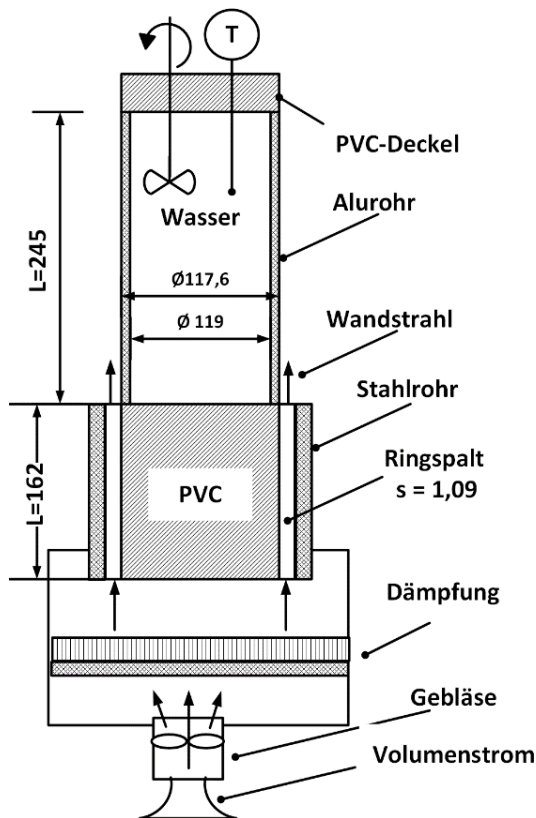


Abb.4 : Aufbau des Experiments

Alle Maße in mm. Ein Gebläse drückt Luft mit bekanntem Volumenstrom (Mess-Düse) durch ein Beruhigungsgitter in ein Plenum. Die Luft passiert dann einen zylindrischen Spalt der Weite s, der einen massiven Zylinder aus PVC umgibt. Am Austritt geht der PVC-Zylinder in einen dünnwandiges Aluminium-Rohr über, das mit heißem Wasser gefüllt ist. Ein PVC Block dient als Deckel, der ein digitales Thermometer und einen Propeller trägt. Der Propeller hält die Wasser- und damit die Wandtemperatur uniform. Der Temperaturgradient in der dünnen Wand wird vernachlässigt.

Eine Messreihe wird bei einer Wandtemperatur T_{w0} und verschiedenen Geschwindigkeiten gefahren. Der Wärmestrom wird durch den Gradienten dT_w/dt bei T_{w0} in Kombination mit der Wärmekapazität des Wassers und des Aluminiums bestimmt.

Den absoluten Wärmestrom in Watt über die Oberfläche des Zylinders erhält man durch Integration über die Länge L. Dabei ist B der Zylinderumfang. Die Strömung darf als eben angenommen werden, da das Verhältnis von Spaltweite zu Durchmesser sehr klein ist. Die Spaltströmung bleibt laminar bei $Re < 3000$ [3]. Die Wandstrahl Reynoldszahl $(U_\infty L/\nu)$ bleibt unter $6 \cdot 10^5$.

$$\dot{Q}_{th} = 4 B \lambda (0.349 Pr^{0.38}) \sqrt{C} \left(\frac{U_\infty L}{\nu} \right)^{\frac{1}{4}} (T_{w0} - T_\infty) \quad (27)$$

Zur Ermittlung von C kombinieren wir die Gln.(1 und 8) mit der Gl.(31) aus [1]

$$C = \frac{y_{max}}{1.972} \frac{1}{\nu U_\infty^{1/2}} \left(\frac{3}{4} U_{max} \right)^{3/2} \quad (28)$$

Generell ist U_{max} die maximale Geschwindigkeit in einem Punkt (x, y_{max}) . Wir nehmen an, daß das parabolische Profil am Austritt des Spaltes dem Ähnlichkeitsprofil nahe kommt (s.Abb.1 und 2). Dann können wir U_{max} mit $3/2 U_\infty$ identifizieren und das zugehörige y_{max} ist dann $s/2$. Dann folgt

$$\sqrt{C} = \sqrt{\frac{0.5 s}{1.972 L} \left(\frac{9}{8} \right)^{3/2} \left(\frac{U_\infty L}{\nu} \right)^{1/2}} \quad (29)$$

$$\dot{Q}_{th} = 4 B \lambda (0.349 Pr^{0.38}) \sqrt{\frac{0.5 s}{1.972 L} \left(\frac{9}{8} \right)^{3/2} \left(\frac{U_\infty L}{\nu} \right)^{\frac{3}{4}}} (T_{w0} - T_\infty) \quad (30)$$

In dieses Ergebnis geht die Reynoldszahl mit dem Exponenten $3/4$ ein im Gegensatz zu $1/2$ bei der Platte. Hinzu kommt der Geometrieparameter s/L . Der Einfluss der Prandtlzahl ändert sich gegenüber der Platte kaum.

Die Länge L bedarf einer näheren Betrachtung. Obige Theorie basiert auf der Analogie von Strömungs- und Temperaturgrenzschicht. Beide teilen sich Ursprung und Ähnlichkeitskoordinaten. Von der Spaltmündung aus gesehen ist der Teil stromauf virtuell und der Teil stromab real mit der Wandbindung $f' = 0$. Die thermische Grenzschicht sieht stromab konstante Wandtemperatur, jedoch kann man an der Mündung keine ähnliche Temperaturverteilung zuordnen wie bei der Geschwindigkeit, weil der Wärmeübergang ja erst dort beginnt. Streng genommen kann die Ähnlichkeitslösung also die vorliegende Randbedingung nicht erfüllen. Ein Kompromiss besteht deshalb darin L die Länge des geheizten Zylinders zuzuordnen und mit einem Korrekturfaktor zu versehen.

Ergebnisse

Es wurden die Wärmeübergänge bei Wandtemperaturen T_{w0} von 90, 80, 70, 60 und 50°C gemessen. Die Ergebnisse finden sich in Abb.5 in dieser Reihenfolge von oben nach unten.

Die Symbole geben den Wärmetransport \dot{Q} in Watt aufgetragen gegen die Reynoldszahl ($U_\infty L/\nu$). Die Linien folgen Gl.(30). Zur Anpassung an die Daten wurde L der Reihe nach mit 1.16; 1.1; 1.1; 0.85; 0.85 korrigiert. Das wichtigste Ergebnis besteht in der Bestätigung der Reynoldszahl-Abhängigkeit mit dem Exponent $\frac{3}{4}$. (Der Exponent $\frac{1}{2}$ wäre gänzlich unzutreffend.) Die geringe Korrektur von L zeigt, dass L trotz der Problematik mit der Randbedingung die maßgebliche Länge darstellt. Die Streuung der Datenpunkte resultiert aus kleinen Schwankungen bei der Raumtemperatur, dem Volumenstrom, den temperaturabhängigen Maßen und anderen, die bei gegebenem Aufwand nicht auszuschließen sind.

Den Einfluss freier Konvektion können wir hier ausschließen. Sie beträgt zwar ohne Strömung maximal gemessene 50 Watt, allerdings wird sie im Strömungsfall vollständig unterdrückt. Das zutreffende Kriterium $Gr \ll Re^2$ (see e.g. [4]) wird im vorliegenden Datenbereich erfüllt.

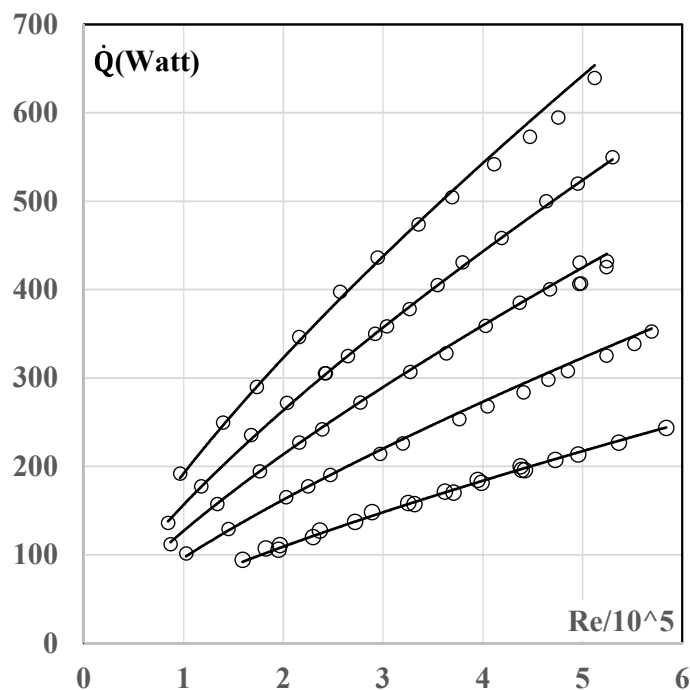


Abb.5: Wärmetransport in Watt vom geheizten Zylinder zum Wandstrahl aufgetragen gegen die Reynoldszahl ($U_\infty L/\nu$). Die Punkte zeigen Messungen, die Linien folgen Gl.(30). Die Wandtemperaturen T_{w0} sind, von oben nach unten 90, 80, 70, 60, 50°C.

Resümee

Die Temperaturgrenzschicht des Wandstrahls wurde unter Verwendung der Lösung der Geschwindigkeitsgrenzschicht als Ähnlichkeitslösung dargestellt. Eine in der Herleitung berücksichtigte Konstante C erlaubt letztlich die Anpassung der realen Düsenströmung an das Ähnlichkeitskoordinatensystem mit virtuellem Ursprung. Daraus folgt mit dem Fick'schen Gesetz der Wärmeübergang an der isothermen Wand. Im Vergleich zur Plattenströmung zeigt sich Folgendes. Der Einfluss der Prandtlzahl bleibt etwa erhalten. Die Reynoldszahl geht mit dem Exponenten $\frac{3}{4}$ ein im Gegensatz zu $\frac{1}{2}$ bei der Platte. Zusätzlich zur Reynoldszahl zeigt sich ein Geometrieparameter s/L . Der virtuelle Ursprung des Koordinatensystems, der nicht

mit dem realen übereinstimmt, wandert mit den Parametern der Strömung. Damit verknüpft besteht das Problem der Anpassung der Randbedingungen der Temperaturgrenzschicht, da stromauf der realen Quelle kein Wärmeübergang vorliegt. Der Vergleich mit Experimenten erfordert deshalb die oben diskutierten, sinnvollen Annahmen.

Daten zum Wärmeübergang wurden an einem längs angeströmten, beheizten, isothermen Zylinder gemessen. Die Ergebnisse bestätigen insbesondere die Reynoldszahlabhängigkeit, aber auch die absoluten Wärmeströme. Zur Überprüfung des Einflusses von Pr und s/L wären weitere, umfangreiche Messungen notwendig.

Die Antwort auf die Frage ob der Wandstrahl besser kühlt als die Plattenströmung hängt von der Parameterwahl ab. Bei z.B. $Re = 5 \cdot 10^5$ und $\frac{s}{L} = 1/250$ wäre der Wandstrahl etwa zweimal effektiver.

- [1] F.Peters, C.Ruppel, A.Javili and T.Kunkel
The two-dimensional laminar wall jet. Velocity measurements compared with similarity theory. *Forsch. Ingenieurwes.* 72:19-28, 2008
- [2] H.Schlichting
Boundary Layer Theory. Verlag G.Braun Karlsruhe 1960
- [3] H.Schlichting, K.Gersten
Grenzschicht-Theorie. Springer-Verlag 1997
- [4] F.P.Incropera, D.P.Witt
Fundamentals of Heat and Mass Transfer. John Wiley Sons, 3rd ed.1990