# Kombinierte optische und Röntgen-Messungen einer überlaufenden Schaumströmung

# Combining optical and X-ray measurements of an overflowing liquid foam

#### Tobias Lappan <sup>1,\*</sup>, <u>Dominic Herting</u> <sup>1,2</sup>, Ekaterina Zamaraeva <sup>1</sup>, Julian Stenzel <sup>2</sup>, Muhammad Ziauddin <sup>2</sup>, Artem Skrypnik <sup>2</sup>, Natalia Shevchenko <sup>1</sup>, Sven Eckert <sup>1</sup>, Kerstin Eckert <sup>1,2</sup>, Sascha Heitkam <sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Institut für Fluiddynamik, Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf, 01328 Dresden

<sup>2</sup> Institut für Verfahrenstechnik und Umwelttechnik, Technische Universität Dresden, 01062 Dresden

\* korrespondierender Autor: t.lappan@hzdr.de

Particle Image Velocimetry, Particle Tracking Velocimetry, Röntgen-Radiographie, Schaum liquid foam flow, particle image velocimetry, particle tracking velocimetry, X-ray radiography

## Zusammenfassung

Die Schaumflotation ist eines der wichtigsten Trennverfahren in Prozessen der Mineralaufbereitung und des Materialrecyclings. Dabei lagern sich die zu gewinnenden Feststoffpartikel in der Trübe an Gasbläschen an und werden mit dem Schaum aus der Flotationszelle heraustransportiert. In industriellen Flotationsanlagen wird die überlaufende Schaumströmung in der Regel mittels optischer Messtechnik überwacht und ist daher auf die freie Oberfläche des partikelbeladenen Schaums beschränkt. Um auch die Strömung des optisch nicht zugänglichen Schaums unterhalb der Oberfläche zu messen, kombinierten wir optische und Röntgen-Messungen im Labormaßstab und identifizierten insbesondere Gradienten der lokalen Strömungsgeschwindigkeit im Bereich des Überlaufs. In Abhängigkeit des Flüssigkeitsanteils und der Stabilität des Schaums wurden mittels X-ray Particle Tracking Velocimetry (X-PTV) um ein Vielfaches höhere Geschwindigkeiten bestimmt als an der freien Schaum-Oberfläche sowie durch die transparente Seitenwand im Laborexperiment optisch gemessen wurden. Im Falle eines stabilen Schaums neigt dieser zum Auftürmen an der Oberfläche, wodurch die Strömungsgeschwindigkeit am Überlauf tendenziell unterschätzt wird. Insgesamt liefern optische Messungen kein vollständiges Bild des Strömungsprofils des überlaufenden Schaums. In weiterführenden Untersuchungen am Laborexperiment sollen Stereo-Aufnahmen der freien Oberfläche gemacht werden, um das Höhenprofils des Schaums sowie seine Strömungsgeschwindigkeit mittels Photogrammetrie auszuwerten.

## Einleitung

Schaum und dessen Strömungsverhalten sind von zentraler Bedeutung für die Schaumflotation zur Aufbereitung von Erzmineralien und zum Recycling von metallischen Sekundärrohstoffen. Die selektive Trennung von unterschiedlichen Partikelsorten in Flotationszellen basiert auf der unterschiedlichen Oberflächenbenetzbarkeit der Partikel in der Trübe. Aufgrund ihrer hydrophoben Oberflächen haften die zu gewinnenden Feststoffpartikel an Gasbläschen und werden im Schaum aus der Flotationszelle heraustransportiert. Die Ausbringung der Feststoff-(Neethling & Cilliers, 2002) als auch der Flüssigphase (Neethling et al., 2003; Stevenson et al., 2003) aus der überlaufenden Schaumströmung wird in industriellen Flotationsanlagen optisch überwacht. Dies funktioniert nur an der optisch zugänglichen freien Schaum-Oberfläche (Zhao et al., 2019), da die dreidimensionale Blasenstruktur des Schaums nicht transparent für sichtbares Licht ist. In Laborexperimenten werden optische Messtechniken angewandt, um die Schaumstruktur und das Strömungsverhalten in quasi-zweidimensionalen Konfigurationen zu

untersuchen (K. E. Cole, Brito-Parada, et al., 2012). In dreidimensionalen und folglich optisch intransparenten Konfigurationen sind bildgebende Messungen mithilfe von Röntgen-, Neutronen- oder Gammastrahlung realisierbar. Positron Emission Particle Tracking (PEPT) wurde mit der optischen Messung in einer guasi-zweidimensionalen, 12 mm dünnen Schaumsäule kombiniert (K. E. Cole, Waters, Parker, et al., 2010) und Partikelbewegungen in der dieser Schaumströmung untersucht (K. E. Cole, Waters, Fan, et al., 2010). In weiterführenden experimentellen Studien wurden die PEPT-Tracer hinsichtlich der Partikelgröße (K. E. Cole, Buffler, et al., 2012) und der hydrophoben oder hydrophilen Partikeloberflächen (K. Cole et al., 2014) an reale Partikelsysteme in Flotationsanwendungen angepasst. (Boucher et al., 2017) verwendeten direkt aktivierte Mineralpartikel für PEPT-Messungen in einer Schaumflotationszelle im Labormaßstab. Ein grundsätzlicher Nachteil von PEPT-Messungen ist die geringe Anzahl an Tracer-Partikeln, um diese voneinander unterschieden zu können, sodass typischerweise entweder punktuelle oder Langzeitmessungen unter konstanten Strömungsbedingungen durchgeführt werden. Mittel Positronen-Emissions-Tomographie, d.h. ohne Hinzugabe von Tracern, wurde der Flüssigkeitsanteil in überlaufendem Schaum bestimmt (K. Cole et al., 2015). Ebenso eignet sich Neutronenradiographie sehr gut zur Visualisierung der Schaumstruktur (Heitkam et al., 2018) und des lokalen Flüssigkeitsanteils, da Neutronenstrahlung stärker als Röntgenoder Gamma-Strahlung vom Wasser im Schaum geschwächt wird. Neutronenradiographie ermöglicht auch die Verfolgung von Partikelbewegungen im Schaum (Heitkam et al., 2019). Hierbei liegt die Herausforderung in der Unterscheidung zwischen kleinen Partikeln und dem statistischen Bildrauschen in Neutronenbildern mit geringen Kontrast-Rausch-Verhältnis (Lappan et al., 2021), was eine komplexe Bilddatenverarbeitung erfordert (Birjukovs et al., 2022). Im Gegensatz zur Neutronenradiographie bieten die Röntgenradiographie mit für Schäume maßgeschneiderten Tracer-Partikeln den Vorteil, dass Strömungsmuster und Geschwindigkeiten in dreidimensionalen Schaum-Konfigurationen mit hoher Orts- und Zeitauflösung mittels X-ray Particle Tracking Velocimetry (X-PTV) gemessen werden können (Lappan et al., 2020). In dieser Arbeit haben wir optische und tracer-basierte Röntgen-Messungen kombiniert, um lokale Geschwindigkeiten in einer überlaufenden Schaumströmung mittels eines angepassten

lokale Geschwindigkeiten in einer überlaufenden Schaumströmung mittels eines angepassten *Particle Image Velocimetry* (PIV) Algorithmus sowie X-PTV zu bestimmen. Der Flüssigkeitsanteil des Schaums wurde, parallel zu allen bildgebenden Messungen, anhand der elektrischen Leitfähigkeit des Schaums zwischen mehreren Elektroden am Überlauf überwacht. Der Vergleich der Strömungsgeschwindigkeiten an der transparenten Seitenwand, an der freien Schaum-Oberfläche sowie unterhalb der Oberfläche zeigt Geschwindigkeitsgradienten auf, die einen signifikanten Einfluss auf die Materialausbringung haben, aber bisher mittels optischer Messtechnik in industriellen Flotationsanlagen nicht detektiert werden.

## **Experiment und Messtechniken**

Der experimentelle Aufbau zur Untersuchung der überlaufenden Schaumströmung sowie die verwendeten bildgebenden Messtechniken sind in Abb. 1 schematisch dargestellt und in den nachfolgenden Abschnitten kurz beschrieben.

## Schaum-Experiment

Das Experiment zur überlaufenden Schaumströmung erfolgte im Labormaßstab in einem Strömungskanal mit einer quadratischen Querschnittsfläche von  $100 \ mm \times 100 \ mm$ . Im Hinblick auf die optischen und Röntgen-Messungen war dieser Kanal komplett aus Acrylglas mit einer Wanddicke von  $10 \ mm$  gefertigt. Folglich war die Schaumströmung an der transparenten Seitenwand des Kanals optisch zugänglich, und außerdem wurde die Röntgenstrahlung durch die Kanalwände senkrecht zur Strahlrichtung ( $2 \cdot 10 \ mm = 20 \ mm$ ) nicht merklich abgeschwächt. Am Boden des Kanals war ein Blasenerzeuger (Sinterrohr aus porösem Polyethylen, hydrophob, Porengröße:  $60 \ \mu m$ ) in eine Tensid-Lösung getaucht. Zur kontinuierlichen Erzeugung von Schaumblasen wurde Druckluft mit einem konstantem Volumenstrom ( $\dot{V} = 0.05 \ L \ s^{-1}$ ) durch das poröse Rohr in die Lösung eingeleitet. Der Schaum strömte in vertikaler Richtung im Kanal und floss an einem einseitigen horizontalen Überlauf in die freie Umgebung ab.



Abb. 1: Schematische Darstellung des Labor-Experiments und der bildgebenden Messtechniken: überlaufende Schaumströmung, die mittels optischer und Röntgen-Messtechnik erfasst wird, um die lokale Strömungsgeschwindigkeit (a) durch die transparente Seitenwand, (b) an der freien Schaum-Oberfläche sowie (c) in der dreidimensionalen Schaumströmung mithilfe angepasster PIV- und X-PTV-Algorithmen zu bestimmen; Überwachung des Flüssigkeitsanteils des Schaums am Überlauf mit Elektrodenpaaren.

Zur Herstellung der Tensid-Lösung wurde Natriumdodecylsulfat (SDS) in Leitungswasser bei Raumtemperatur gelöst. Wie in Tab. 1 aufgelistet, wurde die Konzentration *c* im Rahmen einer Parameterstudie variiert, lag aber stets unterhalb der kritischen Mizellbildungskonzentration. Die Konzentration wurde in diesem Experiment so gewählt, dass im interessierenden Bereich des Überlaufs ein tendenziell instabiler Schaum mit hohem Flüssigkeitsanteil und hoher Fließfähigkeit vorlag. Unabhängig von der Konzentration war, aufgrund der konstanten Porengrößen des gleichen Blasenerzeugers, die Blasengrößenverteilung am Überlauf sehr ähnlich. In Vorversuchen wurde für die primären Schaumblasen ein mittlerer Durchmesser von 0,3 mm bestimmt, aber infolge des Reißens des Flüssigkeitsfilms und Blasenkoaleszenz wiesen einzelne Blasen beim Erreichen des Überlaufs einen Durchmesser von bis zu 1 *mm* auf.

<u> </u>		
i	c <sub>i</sub>	c <sub>i</sub> /CMC
1	1,0 <i>g L</i> <sup>-1</sup>	0,43
2	$0,5 \ g \ L^{-1}$	0,22

Tab. 1: Natriumdodecylsulfat-Konzentration in der Tensid-Lösung: Absolutwert  $c_i$  und in Relation zur kritischen Mizellbildungskonzentration  $CMC = 2,3 g L^{-1}$  (Dominguez et al., 1997).

Der Flüssigkeitsanteil  $\varphi_l$  im Schaum wurde, gleichzeitig mit den einzelnen optischen oder Röntgen-Messdurchläufen, anhand der elektrischen Leitfähigkeit der Flüssigphase gemessen, um die Reproduzierbarkeit der Schaumerzeugung und der Strömungsmessung zu beurteilen. Zu diesem Zweck waren drei Elektrodenpaare (Abb. 1: EP1, EP2, EP3) in gleichmäßigen Abständen in die Kanalwand auf Höhe des Überlaufs eingelassen. Basierend auf einem empirischen Zusammenhang zwischen dem Flüssigkeitsanteil und der relativen elektrischen Leitfähigkeit des Schaums, d.h. bezogen auf die Leitfähigkeit der Tensid-Lösung, lässt sich der Flüssigkeitsanteil von trockenen oder nassen Schäumen mit einem relativen Fehler von weniger als 5 % bestimmen (Feitosa et al., 2005). Vor der Messung ist eine Kalibrierung mit der Tensid-Lösung erforderlich, die mit dem mittig liegenden Elektrodenpaar EP2 durchgeführt wurde. Die Leitfähigkeitsmessung und Bestimmung des Flüssigkeitsanteils in der Schaumströmung erfolgten mit einer Messfrequenz von 2 Hz zwischen allen Elektrodenpaaren EP1, EP2 und EP3. In Abb. 2 ist gemessene Flüssigkeitsanteil bei einer SDS-Konzentration  $c_1 = 1,0 \ g \ L^{-1}$  exemplarisch für mehrere Messdurchläufe mit einer Dauer von jeweils 10 s aufgetragen. Der Flüssigkeitsanteil des nassen Schaums beträgt rund 10 %, ist entfernt vom Überlauf etwas geringer (EP1: 8 - 10 %) und weist in unmittelbarer Nähe des Überlaufs (EP3) erwartungsgemäß die größten Schwankungen zwischen den einzelnen Messdurchläufen auf.



Abb. 2: Flüssigkeitsanteil  $\varphi_l$  des Schaums ( $c_1 = 1,0 \ g \ L^{-1}$ ), bestimmt anhand der elektrischen Leitfähigkeit (a) zwischen dem linken (EP1), (b) mittleren (EP2) und (c) rechten Elektrodenpaar (EP3), gemessen in mehreren Messdurchläufen über eines Messdauer von jeweils 10 s.

#### Optische Messung durch die transparente Seitenwand

Die optischen Messung der Schaumströmung durch die transparente Seitenwand fokussierten sich auf den Bereich des Überlaufs, wobei das Bildfeld der horizontal ausgerichteten Kamera auch das nächstgelegene Elektrodenpaar (EP3) erfasste (Abb. 1a). Oberhalb der Kamera war ein LED-Punktstrahler positioniert. Je Messdurchlauf wurden 1500 Bilder über eine Dauer von 10 s mit einer Bildfrequenz von 150 fps und einer Belichtungszeit von 1 ms aufgenommen. Die Bildsequenzen wurden mittels eines angepassten PIV-Algorithmus ausgewertet, um die lokale Strömungsgeschwindigkeit des Schaums am Überlauf zu bestimmen (Abb. 5). In konventionellen PIV-Messungen werden kleinste Partikel, die der Fluidströmung treu folgen, verwendet, um anhand der kollektiven Partikelbewegung das Geschwindigkeitsfeld des Fluids zeitaufgelöst zu bestimmen. Im Gegensatz dazu wurden der Schaumströmung keine PIV-Partikel hinzugegeben, sondern stattdessen die Schaumstruktur der Blasen an der transparenten Wand und insbesondere die Lichtreflexionen auf den Blasenoberflächen als Messinformation für die PIV-Auswertung genutzt. Die Größe der Abfragefenster betrug  $48 px \times 48 px$  mit einer Überlappung von 75 % zwischen benachbarten Abfragefenstern. Unter Berücksichtigung der Bildpixelgröße von 0.04 mm entsprach dies rund  $2 mm \times 2 mm$  und somit einem Vielfachen der vorab gemessenen Blasengröße (0,3 mm bis 1,0 mm).

#### Optische Messung an der freien Schaum-Oberfläche

Die optische Messung der Schaumströmung an der freien Oberfläche erfolgte nach dem gleichen Prinzip wie die Strömungsmessung durch die transparente Seitenwand. Die vertikal ausgerichtete Kamera erfasste die Schaumoberfläche (Abb. 1b) sowohl vor als auch nach dem Überlauf ( $-40 \ mm \leq x \leq 10 \ mm$ ) entlang seiner gesamte Länge  $|z| = 100 \ mm$  (Abb. 7). Die Bildfrequenz (150 fps) und die Belichtungszeit ( $1 \ ms$ ) wurden beibehalten. Weil die freie Schaum-Oberfläche in diesem Experiment meist einen Neigungswinkel gegenüber der Bildebene aufwies, beleuchtete der LED-Punktstrahler den Schaum im Bereich des Überlaufs von schräg oben, d.h. unter einem Winkel von etwa 30° zur Bildachse. Zu beachten ist, dass, ebenfalls aufgrund der Neigung der Schaum-Oberfläche, die Bildsequenzen nur eine Projektion der Bewegung der Schaumblasen bzw. der Lichtreflexionen in den Blasenoberflächen wiedergeben. Folglich liefert die PIV-Auswertung nur die horizontale Komponente  $v_x$  des Geschwindigkeitsvektors, während die vertikale Komponente  $v_y$  nicht zugänglich ist. Die dritte Komponente  $v_z$  ist hier vernachlässigbar klein. Im Falle stabiler Schäume ist die oberflächenbezogene Strömungsmessung am Überlauf erschwert, wie im Weiteren anhand der Messungen für die beiden Konzentrationen  $c_1 = 1,0 \ g \ L^{-1}$  und  $c_2 = 0,5 \ g \ L^{-1}$  (Abb. 8) gezeigt und diskutiert wird.

#### Röntgen-Messung in der dreidimensionalen Schaumströmung

Im Gegensatz zu den optischen Messungen zielte die Röntgen-Messung auf die Geschwindigkeitsbestimmung im dreidimensionalen Volumen der Schaumströmung im Bereich des Überlaufs, d.h. entlang der z-Richtung (Abb. 1c), mittels X-ray Particle Tracking Velocimetry (X-PTV) (Lappan et al., 2020) ab. Hierfür wurden maßgeschneiderte Tracer-Partikel in den Schaum gegeben, die an den Blasenoberflächen haften und der Strömung folgen. Diese leichtgewichtigen Tracer bestanden aus einem 3D-gedruckten Tetraeder mit einer Kantenlänge von 4 mm, an dessen vier Ecken je ein 0,5 mm kleines Metallkügelchen geklebt wurde. Weil Schaum eine hohe Durchlässigkeit für Röntgenstrahlen aufweist und die Tetraeder aus Polymermaterial gefertigt waren, ist nur das Metallkügelchen-Quartett jedes Tracers mit hohem Kontrast in den Röntgenbildern sichtbar (Abb. 3).











Abb. 3: Maßgeschneiderte Tracer-Partikel für Schaumströmungen: (a) CAD-Modell für den 3D-Druck des Tetraeders aus Polymermaterial, (b) Kleben von kleinen Metallkügelchen an die vier Ecken des Tetraeders, (c) im Röntgen-Bild sind nur diese Metallkügelchen sichtbar.

(b) stereomikroskopisches Bild

Die Bilderfassung erfolgte mit der gleichen Bildfrequenz (150 fps) wie bei den optischen Messungen, die Belichtungszeit (3 ms) war allerdings länger. Die Bildpixelgröße der Röntgenbilder ist vergleichbar mit jener der optischen Messungen und beträgt 0,055 mm, bestimmt für die Mittelebene des Schaumkanals bei z = 0. Nach mehreren Schritten der Bild-Vorverarbeitung (Abb. 4) wurde die Tracer-Bewegung in den Röntgenbildsequenzen verfolgt und die Geschwindigkeit entlang des Bewegungspfads bestimmt. Zu beachten ist, dass die Tracer mithilfe von Röhrchen an unterschiedlichen Start-Positionen, insbesondere bezüglich der z-Richtung, in die Schaumströmung gegeben wurden, aber die Röntgenbilder nur eine zweidimensionale Projektion des Schaum-Experiments und der Tracer-Bewegungspfade liefern.





(b) Inversion

(c) Hintergrund-Subtraktion

(d) Bandpassfilter

Abb. 4: Bild-Vorverarbeitung zur Erkennung der Tracer-Partikel: (a) das originale Röntgen-Bild (b) wird invertiert, (c) das Hintergrund-Bild subtrahiert und (d) ein Bandpassfilter angewandt, um einen hohen Kontrast zwischen den Metall-Kügelchen des Tracers und dem umgebenden Schaum zu erzielen. Die roten kreisförmigen Markierungen kennzeichnen die Position des jeweiligen Tracers.

#### Messergebnisse & Diskussion

In den nachfolgenden Abschnitten sind die Messergebnisse der beiden optischen Messungen und der Röntgen-Messungen dargelegt und diskutiert. Abschließend werden die an der transparenten Wand, an der freie Schaum-Oberfläche und mithilfe der Röntgen-Tracer gemessenen Geschwindigkeiten miteinander verglichen.

#### Optische Messung durch die transparente Seitenwand

In Abb. 5 ist das Geschwindigkeitsfeld der Schaumströmung (für  $c_1 = 1,0 \ g \ L^{-1}$ ) an der transparenten Wand für einen beliebigen Zeitpunkt (Abb. 5a) sowie gemittelt über die Messdauer von 10 s (Abb. 5b) dargestellt. Der Überlauf und die nächstgelegene Elektrode (EP3) wurden für die Auswertung mittels des angepassten PIV-Algorithmus maskiert. Die Vektordarstellung in Abb. 5b zeigt, dass die Strömungsgeschwindigkeit des Schaums an der transparente Seitenwand sowohl hinsichtlich des Betrags als auch der Richtung eine Funktion des Ortes (x, y) ist. Der Schaum steigt, infolge der kontinuierlichen Blasenerzeugung in der Tensid-Lösung am Boden des Kanals, zunächst auf  $(x < -5 \ mm)$  und bewegt sich anschließend nahezu horizontal über den Überlauf  $(-5 \ mm \le x \le 5 \ mm)$ , wobei der Betrag der Geschwindigkeit mit steigender *y*-Koordinate erst zu- und dann wieder abnimmt. Schließlich fließt der Schaum in vertikaler Richtung in die freie Umgebung ab  $(x > 5 \ mm)$  und wird dabei aufgrund der Gravitation beschleunigt, sodass der Betrag der Geschwindigkeit seinen Maximalwert erreicht. Die Standardabweichung der zeitlich gemittelten Werte (Abb. 5c) bewegt sich in der Größenordnung von maximal 10 %, insbesondere kurz nach Passieren des Überlaufs  $(x \approx 5 \ mm)$ , was auf eine instationäre, aber keine stark turbulente Strömung des Schaums hinweist.



Abb. 5: Optische Messung der Schaumströmung ( $c_1 = 1,0 \ g \ L^{-1}$ ) durch die transparente Seitenwand: (a) instantanes Geschwindigkeitsfeld v, (b) zeitlich Mittelung des Geschwindigkeitsfeld  $\bar{v}$ , (c) Standardabweichung  $\sigma_v$  vom zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsfeld.

Zur weiteren Auswertung des Geschwindigkeitsfeld der Schaumströmung an der transparenten Seitenwand wird die Geschwindigkeit v als Funktion der Höhe y(x) an der Stelle x = 0, d.h. in der Mitte des Überlaufs, betrachtet. Da die vertikalen Geschwindigkeitskomponente  $v_y$ über einen weiten Bereich von y und insbesondere direkt oberhalb des Überlaufs deutlich kleiner als die horizontale Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  ist, liegt der Fokus im Folgenden auf letzterer Komponente. Die Betrachtung des zeitlichen Mittels  $\bar{v}_x$  eignet sich außerdem gut für den späteren Vergleich mit den Geschwindigkeiten der optischen Messung an der freien Schaum-Oberfläche und der Röntgen-Messung.

Das Geschwindigkeitsprofil  $v_x(y, x = 0)$  an verschiedenen beliebigen Zeitpunkten  $t_i$  weist mehrere lokale Minima und Maxima auf (Abb. 6a), während das zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsprofil  $\bar{v}_x(y, x = 0)$  durch nur ein Maximum charakterisiert ist (Abb. 6b). Dieses Maximum ist auch in den Kurvenverläufen in Abb. 6a erkennbar. Außerdem verläuft die Standardabweichung als Einhüllende des Kurvenverlaufs in Abb. 6b sehr gleichmäßig, sodass die zeitliche Mittelung statthaft ist. Der Unterschied zwischen den Geschwindigkeitsprofilen  $v_x(y, x = 0)$  und  $\bar{v}_x(y, x = 0)$  ist sowohl auf den instationären Charakter der Schaumströmung als auch auf das Auswerteverfahren, d.h. den angepassten PIV-Algorithmus, zurückzuführen. Abb. 6b zeigt für die Tensid-Konzentration  $c_1 = 1,0 \ g \ L^{-1}$  einen positiven Geschwindigkeitsgradienten  $d\bar{v}_x/dy$  bis zur Höhe  $y \approx 7 \ mm$ , und oberhalb dieser Höhe nimmt die horizontale Geschwindigkeitskomponente wieder ab. Im Falle der geringeren Konzentration  $c_2 = 0,5 \ g \ L^{-1}$  (Abb. 6c) liegt das Geschwindigkeitsmaximum auf ähnlicher Höhe, das Geschwindigkeitsprofil ist aber weniger stark ausgeprägt.



Abb. 6: Optische Messung der Schaumströmung durch die transparente Seitenwand: (a) horizontale Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  aufgetragen gegen die vertikale Position y am Überlauf (x = 0) für verschiedene Zeitpunkte  $t_i$ , (b, c) zeitlich Mittelung  $\bar{v}_x$  und Standardabweichung  $\sigma_{v_x}$  der horizontalen Geschwindigkeitskomponente, für (a, b)  $c_1 = 1,0 g L^{-1}$ , (c)  $c_2 = 0,5 g L^{-1}$ ,  $s^{-1}$ .

#### Optische Messung an der freien Oberfläche

In Abb. 7 ist das Geschwindigkeitsfeld der Schaumströmung (für  $c_2 = 0.5 g L^{-1}$ ) an der freien Oberfläche für einen beliebigen Zeitpunkt (Abb. 7a) sowie gemittelt über die Messdauer von 10 *s* (Abb. 7b) dargestellt. Die rote gestrichelte Linie bei x = 0 markiert die Mitte des Überlaufs. Die Geschwindigkeitskomponenten  $v_z$  ist vernachlässigbar klein, sodass hier nur die Komponente  $v_x$  in horizontaler Richtung über den Überlauf betrachtet wird. Die dritte Komponente  $v_y$ in vertikaler Richtung, d.h. oberhalb des Überlaufs bei y = 0, wird aus dieser Kamera-Perspektive nicht erfasst. Im zeitlichen Mittel erreicht die zeitlich gemittelte Geschwindigkeit  $\bar{v}_x$  in einem eng begrenzten Bereich um den Überlauf (-10 mm < x < 10 mm) ihre höchsten Werte. Zu den beiden seitlichen Wänden ( $z = \pm 50 mm$ ) sowie innerhalb des Kanals fern des Überlaufs (x < -20 mm) nimmt  $\bar{v}_x$  ab. Die Standardabweichung  $\sigma_{v_x}$  vom zeitlichen Mittel beträgt für große Bereiche der freien Oberfläche, insbesondere im Bereich des Überlaufs, bis zu 25 % (Abb. 7c). Vereinzelt ist die Standardabweichung in überlauffernen Bereichen noch deutlich größer. Dies ist mit einem lawinenartigen Abrutschen des Schaums an der freien Oberfläche zu erklären, welches in allen Messwiederholungen beobachtet wurde und ein starkes Indiz für den instationären Charakter der überlaufenden Schaumströmung ist.

Nachfolgend wird in Abb. 8 das Geschwindigkeitsprofil  $\bar{v}_x(z, x = 0)$  und die zugehörige Standardabweichung am Überlauf, d.h. entlang der roten gestrichelten Linie in Abb. 7, betrachtet. Für die Tensid-Konzentration  $c_2 = 0.5 g L^{-1}$  (Abb. 7b, Abb. 8b) ist der Geschwindigkeitsgradient  $d\bar{v}_x/dz$  am Überlauf nur schwach ausgeprägt: in der Kanal-Mitte (z = 0) beträgt die Geschwindigkeit weniger als  $15 mm s^{-1}$ , an den seitlichen Kanalwänden ( $z = \pm 50 mm$ ) mehr als  $10 mm s^{-1}$ . Bei der höheren Konzentration  $c_1 = 1.0 g L^{-1}$  (Abb. 8a) liegt das Geschwindigkeitsprofil auf einem niedrigeren Niveau, der Geschwindigkeitsgradient zwischen der Mitte des Kanals ( $\bar{v}_x < 10 mm s^{-1}$ ) und seinen Wänden ( $\bar{v}_x < 5 mm s^{-1}$ ) ist aber stärker ausgeprägt. Speziell für diese höhere Konzentration ist anzumerken, dass die Strömungsmessung an der freien Oberfläche sehr kritisch betrachtet werden muss. In allen Messwiederholungen wurde, infolge des Ansammelns von Schaum an der freien Oberfläche, die Bildung einer trocknenden und demzufolge relativ stabilen Schaumschicht mit überdurchschnittlich großen koaleszierten Blasen beobachtet, die sich teils lawinenartig, aber vergleichsweise langsam über den Überlauf bewegte. Der darunterliegende Schaum floss deutlich schneller ab, was jedoch von der vertikal ausgerichteten Kamera praktisch nicht erfasst werden konnte.



Abb. 7: Optische Messung an der freien Oberfläche der Schaumströmung ( $c_2 = 0.5 \ g \ L^{-1}$ ): (a) instantanes Geschwindigkeitsfeld der horizontale Komponente  $v_x$ , (b) zeitlich Mittelung des Geschwindigkeitsfeld. felds  $\bar{v}_x$ , (c) Standardabweichung  $\sigma_{v_x}$  vom zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsfeld.



Abb. 8: Optische Messung an der freien Oberfläche der Schaumströmung: zeitliche Mittelung  $\bar{v}_x$  und Standardabweichung  $\sigma_{v_x}$  der horizontalen Geschwindigkeitskomponente, aufgetragen gegen die Position *z* entlang des Überlaufs (*x* = 0), für (a)  $c_1 = 1,0 g L^{-1}$ , (b)  $c_2 = 0,5 g L^{-1}$ .

#### Röntgen-Messung in der dreidimensionalen Schaumströmung

In den Röntgen-Messungen werden die Bewegungen der Tracer-Partikel erfasst. Diese Tracer werden innerhalb der Blasenstruktur des Schaums mitgetragen und folgen den Stromlinien der Schaumströmung. Daher gilt die Annahme, dass die Geschwindigkeit jedes Tracers entlang seines Bewegungspfads mit vernachlässigbarer Unsicherheit der Strömungsgeschwindigkeit des Schaums entspricht. In Abb. 1c sind exemplarisch die vollständigen Bewegungspfade von drei verschiedenen Tracern bzw. deren Metallkügelchen gezeigt, die mithilfe der drei Röhrchen an unterschiedlichen Start-Positionen, aber im selben Messdurchlauf in die Schaumströmung gegeben wurde. Abb. 9a zeigt den lokalen Abschnitt der Bewegungspfade am Überlauf ( $-5 mm \le x \le 5 mm$ ) für insgesamt 21 Tracer bzw. deren Schwerpunkte, gemessen in verschiedenen Messdurchläufen (für  $c_1 = 1,0 g L^{-1}$ ). Die zugehörige horizontale Geschwindigkeitskomponente  $v_x(x)$  ist in Abb. 9b geplottet. Alle diese Tracer starteten in der Kanal-Mittelebene ( $z_0 = 0$ ), aber mit leicht unterschiedlichem Abstand in horizontaler ( $x_0$ ) und vertikaler Richtung ( $y_0$ ) zum Überlauf. Aufgrund des zu erwartenden Strömungsprofil des Schaums wird angenommen, dass die Tracer auch am Überlauf in dieser Ebene ( $z \approx 0$ ) blieben. Die Tracer passierten den Überlauf in unterschiedlichen Höhen zwischen  $y \approx 1 mm$  und maximal 10 mm. Die Pfade der Tracer, welche sich in sehr geringer Höhe ( $y \leq 2 mm$ ) mit dem

Schaum am Überlauf bewegten, verlaufen nahezu horizontal. Mit zunehmender Höhe weisen die Bewegungspfade eine parabelähnliche Form auf. Die horizontale Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  der verschiedenen Tracer beträgt zwischen annähernd  $30 mm s^{-1}$  und maximal  $100 mm s^{-1}$ . Für die überwiegende Mehrheit der Tracer, insbesondere für diejenigen mit parabelähnlichen Bewegungspfaden, ist tendenziell eine leichte Zunahme von  $v_x$  beim Passieren des Überlaufs festzustellen. Die starken Fluktuationen der Geschwindigkeit jenes Tracers, der sich in der geringsten Höhe am Überlauf bewegt (in Abb. 9 durch den schwarzen Kreis symbolisiert), sind darauf zurückzuführen, dass dieser Tracer mehrmals kurzzeitig Kontakt mit der Kanalwand am Überlauf hatte.



Abb. 9: Röntgen-Messung in der dreidimensionalen Schaumströmung ( $c_1 = 1,0 \ g \ L^{-1}$ ): (a) Bewegungspfade der Tracer-Partikel y(x) und (b) deren horizontale Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  im Bereich des Überlaufs ( $-5 \ mm \le x \le 5 \ mm$ ), Tracer-Bewegung in der Mittelebene des Schaumkanals ( $z_0 = 0$ ), unterschiedliche Symbole und Farben kennzeichnen unterschiedliche einzelne Tracer.

Um analog zur optischen Messung durch die transparente Seitenwand zu zeigen, dass ein Zusammenhang zwischen der horizontalen Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  und der Höhe y im Bereich des Überlaufs besteht, sind diese beiden Größen in Abb. 10 gegeneinander aufgetragen. Die Darstellung für  $z_0 = 0$  in Abb. 10a basiert auf den Daten aus Abb. 9a und b; außerdem wurde die Bewegungspfade von Tracern nahe ( $z_0 = \pm 35 mm$ ) bzw. sehr nahe den Seitenwänden ( $z_0 = \pm 45 mm$ ) gemessen. Der bereits in Abb. 9 erkannte Zusammenhang geht aus Abb. 10 für  $z_0 = 0$  sehr deutlich hervor: mit zunehmender Höhe y steigt die horizontale Geschwindigkeit  $v_x$ . Für y = 0 können keine Messdaten vorliegen, weil die Position des Tracer-Schwerpunkts betrachtet wird. Dennoch lässt sich aus den Daten und unter Berücksichtigung der Tracer-Größe schlussfolgern, dass auch die Schaumblasen mit Wandkontakt am Überlauf ( $y \rightarrow 0$ ) eine horizontale Geschwindigkeit ungleich null haben. Diese für  $z_0 = 0$  gewonnenen Erkenntnisse lassen sich qualitativ auch auf die Messebene  $z_0 = 35 mm$  und, zumindest ansatzweise, auf  $z_0 = 45 mm$  übertragen. Der Zusammenhang zwischen  $v_x$  und y ist allerdings für  $z_0 = -35 mm$  und  $z_0 = -45 mm$  nicht erkennbar.

Neben dem Geschwindigkeitsgradienten  $dv_x/dy$  innerhalb der jeweiligen Messebene  $z_{0,i}$  offenbart Abb. 10a einen Gradienten  $dv_x/dz$ , d.h. zwischen den unterschiedlichen Messebenen, welcher durch die Seitenwände bedingt ist. Die größten Geschwindigkeitswerte von maximal  $100 \ mm \ s^{-1}$  wurden in die Mittelebene  $z_0 = 0$  gemessen. Näher an den Seitenwänden bewegten sich die Tracer deutlich langsamer, mit weniger als  $50 \ mm \ s^{-1}$ . Der Geschwindigkeitsgradient zwischen den jeweils zwei wandnahen Messebenen auf beiden Seiten, d.h. zwischen  $z_0 = \pm 35 \ mm$  und  $z_0 = \pm 45 \ mm$ , ist weniger ausgeprägt und schwer abschätzbar. Hier wäre eine größere Datenmenge hilfreich.

In Abb. 10b ist die horizontale Geschwindigkeitskomponente  $v_x(y)$  der Tracer in den fünf verschiedenen Messebenen am Überlauf für die Schaumströmung mit der geringeren Tensid-Konzentration  $c_2 = 0.5 \ g \ L^{-1}$  veranschaulicht. Im direkten Vergleich zur höheren Konzentration  $c_1 = 1.0 \ g \ L^{-1}$  (Abb. 10a) ist das Geschwindigkeitsniveau generell geringer. Insbesondere in der Mittelebene  $z_0 = 0$  beträgt  $v_x$  weniger als  $50 \ mm \ s^{-1}$ . Daher ist weder ein Geschwindigkeitsgradient  $dv_x/dy$  innerhalb der jeweiligen Messebene noch ein Gradient  $dv_x/dz$  zwischen den Messebenen klar erkennbar. Sehr nahe an den Seitenwänden ( $z_0 = \pm 45 \ mm$ ) ist die Geschwindigkeit für beiden Konzentrationen annähernd gleich groß.

Insgesamt lässt sich anhand der Messdaten der Tracer-Bewegungen keine klare Symmetrie der Schaumströmung bezüglich der Kanal-Mittelebene  $z_0 = 0$  erkennen. Jedoch ist zu beachten, dass der Bewegungspfad jedes einzelnen Tracers und seine Geschwindigkeit eine Momentaufnahme der Schaumströmung darstellen und daher stark dem Einfluss des instationären Strömungscharakters unterliegen.



Abb. 10: Röntgen-Messung in der dreidimensionalen Schaumströmung: horizontale Geschwindigkeitskomponente  $v_x$ , aufgetragen über der vertikalen Position y im Bereich des Überlaufs, Tracer in unterschiedliche Messebenen  $z_{0,i}$  im Schaumkanal, unterschiedliche Symbole und Farben kennzeichnen unterschiedliche einzelne Tracer, für (a)  $c_1 = 1,0 g L^{-1}$ , (b)  $c_2 = 0,5 g L^{-1}$ .

## Fazit

Die überlaufende Schaumströmung wurde für die Tensid-Konzentrationen  $c_1 = 1,0 \ g \ L^{-1}$  und  $c_2 = 0,5 \ g \ L^{-1}$  mittels optischer Messungen durch die transparente Seitenwand und an der freien Oberfläche sowie mithilfe der Tracer-Partikel in der Röntgen-Messung untersucht. Die mittels PIV und X-PTV bestimmten Geschwindigkeiten und die daraus abgeleiteten Geschwindigkeitsgradienten geben ein Gesamtbild der Schaumströmung in Abhängigkeit von der Konzentration wieder. Der Volumenstrom der Druckluft zur kontinuierlichen Schaumerzeugung war bei allen Messungen konstant und betrug  $\dot{V} = 0,05 \ L \ s^{-1}$ .

Für die Konzentration  $c_1 = 1,0 \ g \ L^{-1}$  wurde durch die transparente Seitenwand ein ausgeprägtes Geschwindigkeitsprofil  $\bar{v}_x(y)$  mit einem Geschwindigkeitsmaximum von rund 25  $mm \ s^{-.1}$ in der Höhe  $y \approx 7 \ mm$  am Überlauf gemessen (Abb. 6b). In der Röntgen-Messung wurde für diejenigen Tracer, die sich sehr nahe den Seitenwänden bewegten ( $z_0 = \pm 45 \ mm$ ), ähnliche

Werte der maximalen horizontalen Geschwindigkeit ( $v_x < 30 \ mm \ s^{-1}$ ) und der zugehörigen Höhe (y < 6 mm) beobachtet (Abb. 10a). Die Bewegungspfade der Tracer in der Mittelebene des Schaumkanals ( $z_0 = 0$ ) zeigen in ihrer Gesamtheit einen positiven Geschwindigkeitsgradienten  $dv_x/dy$  bis zur Höhe  $y \approx 10 mm$ . Dies ist qualitativ in guter Übereinstimmung mit der optischen Messung durch die transparente Seitenwand. Infolge der Wandeinflusses auf die Schaumströmung bzw. die Tracer-Bewegung mit dem Schaum sind die an oder sehr nahe der Wand gemessenen Geschwindigkeitsmaxima um etwa einen Faktor vier kleiner als in der Mittelebene, d.h. unter vernachlässigbar geringem Wandeinfluss. Anzumerken ist, dass keine Bewegungspfade von Tracern in größerer Höhe y > 10 mm erfasst wurden, sodass für diesen  $\gamma$ -Bereich kein Vergleich mit der optischen Messung durch die transparente Seitenwand und den dort gemessenen negativen Geschwindigkeitsgradienten  $dv_r/dy$  möglich ist. Ebenso kann, unter Berücksichtigung der Höhe y, die mittels optischer Messung an der freien Oberfläche bestimmte Geschwindigkeit nicht direkt in einen Vergleich einbezogen werden, weil die optischen Messung durch die transparente Seitenwand nicht die gesamte Höhe des Schaums am Überlauf erfasste. Die bei  $y \approx 20 \ mm$  gemessene Geschwindigkeit ( $\bar{v}_x > 10 \ mm \ s^{-1}$ ) ist größer als die Geschwindigkeit ( $\bar{v}_{\chi} < 5 \ mm \ s^{-1}$ ) der Schaumströmung an der freien Oberfläche (Abb. 8a), deren Höhe y aus dieser Messung allerdings nicht hervorgeht. Zu beachten ist für die Konzentration  $c_1 = 1,0 \ g \ L^{-1}$  außerdem, dass die Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit an der freien Oberfläche infolge des Ansammelns und lawinenartigen Abrutschens von vergleichsweise trockenem Schaum verfälscht ist. Für die Konzentration  $c_2 = 0.5 \ g \ L^{-1}$  und in Abwesenheit großflächigen Schaumansammlungen wurde dagegen ein gleichmäßiges Abfließen des Schaums an der freien Oberfläche beobachtet. Die bei der Höhe  $y \approx 20 mm$  an der transparenten Seitenwand gemessene Geschwindigkeit (Abb. 6c) liegt innerhalb des Bereichs  $\bar{v}_{x} = 10 \dots 15 \ mm \ s^{-1}$  der Schaumströmung an der freien Oberfläche (Abb. 8b). Die bislang fehlenden Informationen bezüglich des Höhenprofils der Schaumströmung an der freien Oberfläche und dessen Einfluss auf die Strömungsgeschwindigkeit sollen in weiterführenden stereo-optischen Messungen mit zwei leicht gegeneinander verkippten Kameras und einer anschließenden photogrammetrischen Bildauswertung gewonnen werden.

Ungeachtet des begrenzten Umfangs der Messungen für nur zwei unterschiedliche Tensid-Konzentrationen und einem konstanten Gasvolumenstrom zur Schaum- bzw. Strömungserzeugung ist insgesamt festzustellen, dass die optischen Messungen durch die transparente Seitenwand und an der freien Oberfläche kein vollständiges Bild des Schaumströmung am Überlauf liefern. Die gemessenen Strömungsgeschwindigkeiten unterliegen dem Einfluss der Kanalwand sowie Oberflächeneffekten, die wiederum vom Flüssigkeitsanteil des Schaums und daraus resultierende Fließeigenschaften abhängig sind. Der optisch gemessene Geschwindigkeitsgradient über der Schaumhöhe wird ebenso in der Röntgen-Messung mit den Tracern erfasst. Der große Vorteil der Röntgen-Messung ist allerdings vielmehr die Geschwindigkeitsmessung in verschiedenen Ebenen mit unterschiedlichem Abstand zur Kanalwand, d.h. die Bestimmung der lokalen Strömungsgeschwindigkeit des Schaums innerhalb des dreidimensionalen Kanals und insbesondere am Überlauf.

## Dankesworte

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft (HE 7529/3-1) danken wir für die finanzielle Unterstützung. Unser besonderer Dank gilt Peggy Jähnigen und Robin Michak für die technische Mitarbeit bei der Vorbereitung des Experiments und der Messungen.

## Literatur

Birjukovs, M., Zvejnieks, P., Lappan, T., Sarma, M., Heitkam, S., Trtik, P., Mannes, D., Eckert, S., & Jakovics, A. (2022). Particle tracking velocimetry in liquid gallium flow around a cylindrical obstacle. *Experiments in Fluids*, *63*(6), 99. https://doi.org/10.1007/s00348-022-03445-2

Boucher, D., Jordens, A., Sovechles, J., Langlois, R., Leadbeater, T. W., Rowson, N. A., Cilliers, J. J., & Waters, K. E. (2017). Direct mineral tracer activation in positron emission particle tracking of a flotation cell. *Minerals Engineering*, *100*, 155–165. https://doi.org/10.1016/j.mineng.2016.10.022

Cole, K., Brito-Parada, P. R., Morrison, A., Govender, I., Buffler, A., Hadler, K., & Cilliers, J. J. (2015). Using Positron Emission Tomography (PET) to determine liquid content in overflowing foam. *Chemical Engineering Research and Design*, *94*, 721–725. https://doi.org/10.1016/j.cherd.2014.10.014 Cole, K., Buffler, A., Cilliers, J. J., Govender, I., Heng, J. Y. Y., Liu, C., Parker, D. J., Shah, U. V.,

van Heerden, M., & Fan, X. (2014). A surface coating method to modify tracers for positron emission particle tracking (PEPT) measurements of froth flotation. *Powder Technology*, 263, 26–30. https://doi.org/10.1016/j.powtec.2014.04.083

Cole, K. E., Brito-Parada, P. R., Xu, C., Neethling, S. J., & Cilliers, J. J. (2012). Experimental studies and numerical model validation of overflowing 2D foam to test flotation cell crowder designs. *Chemical Engineering Research and Design*, *90*(12), 2196–2201. https://doi.org/10.1016/j.cherd.2012.05.009

Cole, K. E., Buffler, A., van der Meulen, N. P., Cilliers, J. J., Franzidis, J.-P., Govender, I., Liu, C., & van Heerden, M. R. (2012). Positron emission particle tracking measurements with 50 micron tracers. *Chemical Engineering Science*, *75*, 235–242. https://doi.org/10.1016/j.ces.2012.02.053

**Cole, K. E., Waters, K. E., Fan, X., Neethling, S. J., & Cilliers, J. J. (2010).** Combining Positron Emission Particle Tracking and image analysis to interpret particle motion in froths. *Minerals Engineering*, 23(11–13), 1036–1044. https://doi.org/10.1016/j.mineng.2010.05.012

Cole, K. E., Waters, K. E., Parker, D. J., Neethling, S. J., & Cilliers, J. J. (2010). PEPT combined with high speed digital imaging for particle tracking in dynamic foams. *Chemical Engineering Science*, *65*(5), 1887–1890. https://doi.org/10.1016/j.ces.2009.10.010

**Dominguez, A., Fernandez, A., Gonzalez, N., Iglesias, E., & Montenegro, L. (1997).** Determination of Critical Micelle Concentration of some surfactants by three techniques. *Journal of Chemical Educa-tion*, 74(10), 1227. https://doi.org/10.1021/ed074p1227

**Feitosa, K., Marze, S., Saint-Jalmes, A., & Durian, D. J. (2005).** Electrical conductivity of dispersions: From dry foams to dilute suspensions. *Journal of Physics: Condensed Matter, 17*(41), 6301–6305. https://doi.org/10.1088/0953-8984/17/41/001

Heitkam, S., Lappan, T., Eckert, S., Trtik, P., & Eckert, K. (2019). Tracking of particles in froth using neutron imaging. *Chemie Ingenieur Technik*, *91*(7), 1001–1007. https://doi.org/10.1002/cite.201800127 Heitkam, S., Rudolph, M., Lappan, T., Sarma, M., Eckert, S., Trtik, P., Lehmann, E., Vontobel, P., & Eckert, K. (2018). Neutron imaging of froth structure and particle motion. *Minerals Engineering*, *119*, 126–129. https://doi.org/10.1016/j.mineng.2018.01.021

Lappan, T., Franz, A., Schwab, H., Kühn, U., Eckert, S., Eckert, K., & Heitkam, S. (2020). X-ray particle tracking velocimetry in liquid foam flow. *Soft Matter*, *16*(8), 2093–2103. https://doi.org/10.1039/C9SM02140J

Lappan, T., Sarma, M., Heitkam, S., Mannes, D., Trtik, P., Shevchenko, N., Eckert, K., & Eckert, S. (2021). X-ray and neutron radiographic experiments on particle-laden molten metal flows. In J. Lee, S. Wagstaff, A. Anderson, F. Tesfaye, G. Lambotte, & A. Allanore (Eds.), *Materials Processing Fundamentals 2021* (pp. 13–29). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-65253-1\_2 Neethling, S. J., & Cilliers, J. J. (2002). Solids motion in flowing froths. *Chemical Engineering Science*, *57*(4), 607–615. https://doi.org/10.1016/S0009-2509(01)00393-1

Neethling, S. J., Lee, H. T., & Cilliers, J. J. (2003). The recovery of liquid from flowing foams. *Journal of Physics: Condensed Matter*, *15*(10), 1563–1576. https://doi.org/10.1088/0953-8984/15/10/305

Stevenson, P., Stevanov, C., & Jameson, G. J. (2003). Liquid overflow from a column of rising aqueous froth. *Minerals Engineering*, *16*(11), 1045–1053. https://doi.org/10.1016/j.mineng.2003.05.004

Zhao, L., Peng, T., Xie, Y., Gui, W., & Zhao, Y. (2019). Froth stereo visual feature extraction for the industrial flotation process. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, *58*(31), 14510–14519. https://doi.org/10.1021/acs.iecr.9b00426