

VERBESSERTE MESSUNGEN DES WANDNAHEN GESCHWINDIGKEITSGRADIENTEN IN DER STRÖMUNGSGRENZSCHICHT MITTELS LDV PROFILSENSOR

E. M. Groß¹, L. M. F. Cammiade¹, M. Rietz¹, M. Dues³, S. Kelm², H.J. Allelein², R. Kneer¹

¹Lehrstuhl für Wärme- und Stoffübertragung, RWTH Aachen University, Aachen, Deutschland

²Institut für Energie- und Klimaforschung (IEK-14) - Forschungszentrum Jülich GmbH

³ILA R&D GmbH, Jülich, Deutschland

Geschwindigkeitsprofile, LDV Profilsensor, Schergeschwindigkeit, Viskose Unterschicht
velocity profile, LDV profile sensor, shear velocity, viscous sublayer

Zusammenfassung

Die Entwicklung von Wandfunktionen zur Beschreibung von Transportprozessen innerhalb der Grenzschicht unter Einfluss von Wandkondensation und Auftriebsphänomenen in CFD-Modellen erfordert genaue und detaillierte Messungen der wandnahen Strömungsprofile. Insbesondere die Erfassung des Geschwindigkeitsgradienten in der viskosen Unterschicht ist von großer Bedeutung, da dieser die Bestimmung der Schergeschwindigkeit u_τ ermöglicht, die für die Skalierung der Wandflüsse erforderlich ist. Die Gewinnung der Geschwindigkeitsprofildaten innerhalb der Grenzschicht, insbesondere der viskosen Unterschicht, in Windkanälen wie der SETCOM (*Separate Effect Test for Condensation Modelling*) Anlage ist mit nicht-invasiven Lasersystemen in vielerlei Hinsicht eine anspruchsvolle Aufgabe. Neben Oberflächenreflexionen und -streuungen, die die Datenerfassung in Wandnähe erschweren, spielt auch die Größe ($44 \times 44 \text{ cm}^2$ Querschnitt) der Einrichtung selbst eine Rolle, da diese den Abstand zwischen dem Messsystem und dem anvisierten Messpunkt definiert. Mit der klassischen Laser-Doppler-Velocimetry kann die Entfernung überwunden werden, aber die räumliche Auflösung ist durch die Größe des Messvolumens begrenzt - eine Folge der geometrischen und optischen Beschränkungen, die durch den Aufbau vorgegeben sind. Ein weiterentwickeltes Laser-Doppler-Velocimetry System, der so genannte Profilsensor, ermöglicht neben der Geschwindigkeitsmessung auch die Bestimmung der Position der Seeding-Partikel entlang einer Messlinie im Messvolumen. Der Profilsensor basiert dabei auf jeweils zwei sich schneidenden Laserstrahlpaaren, die im Messvolumen ein konvergierendes sowie ein divergierendes Interferenzstreifensystem erzeugen. Mit dem beschriebenen System mit einem Arbeitsabstand von 500 mm und einer Messvolumenlänge von 4 mm ist es gelungen, die Schergeschwindigkeit ohne Traversierung des Messsystems und ohne Verwendung einer empirischen Korrelation aus der viskosen Unterschicht zu bestimmen. Außerdem kann durch die Implementierung eines Filters in die angrenzende Wand die Streuung unterdrückt und somit die Datenqualität erhöht werden. Die gewonnenen Messdaten ermöglichen zukünftig die Entwicklung von Wandfunktionen für CFD Rechnungen zur effizienten Berechnung von Transportprozessen in turbulenten Grenzschichten mit Kondensations- und Auftriebseffekten.

Einleitung

Als Grundlage für die Weiterentwicklung eines Wandfunktionsansatzes für den Wärme- und Stofftransport bei Mischkonvektion wird am Forschungszentrum Jülich in einem gemeinsamen Projekt mit der RWTH Aachen die SETCOM-Anlage (Separate Effect Test for Condensation Modeling) betrieben, um Einblicke in den turbulenten Wärme- und Stofftransport in der

Grenzschicht bei Wandkondensation zu gewinnen. Diese Daten wurden für eine detaillierte Validierung von Modellansätzen zur Beschreibung von Transportvorgängen in Wandnähe innerhalb großskaliger CFD-Simulationen verwendet (V. Kumar, et al., 2021; Kelm, et al., 2021; Cammiade, et al., 2020; Kelm, et al., 2019). In den Untersuchungen wurde deutlich, dass die genaue experimentelle Messung der Wandschubspannung und damit die Schergeschwindigkeit u_τ die zwingende Voraussetzung für die Skalierung der Daten und die Übertragung in ein Modell ist. Eine voll entwickelte turbulente Grenzschicht kann in drei Teilschichten unterteilt werden: die lineare (viskose Unterschicht), die Übergangsschicht (Pufferschicht) und die logarithmische Schicht (White, 1974). Während die viskose Unterschicht in erster Linie durch den Molekulartransport bestimmt wird, wird alles außerhalb von ihr durch Turbulenzen beeinflusst. Bei erzwungener Konvektion ist eine mathematische Beschreibung wie das Spalding-Modell in der Lage, diese das wandnahe Geschwindigkeitsprofil analytisch zu beschreiben:

$$y^+ = u^+ + e^{-\kappa B} \cdot \left(e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2} - \frac{(\kappa u^+)^3}{6} - \frac{(\kappa u^+)^4}{24} \right) \quad (1)$$

mit den entdimensionierten Variablen $u^+ = \frac{u}{u_\tau}$ und $y^+ = y \frac{u_\tau}{\nu}$, ν als dynamische Viskosität, und den Modellparametern κ und B .

Bei früheren Datenerfassungen an der SETCOM-Anlage, Abb. 1, konnte die Schergeschwindigkeit nicht mit angemessener Genauigkeit geschätzt werden ($y^+ < 10$: $u^+ \neq y^+$).

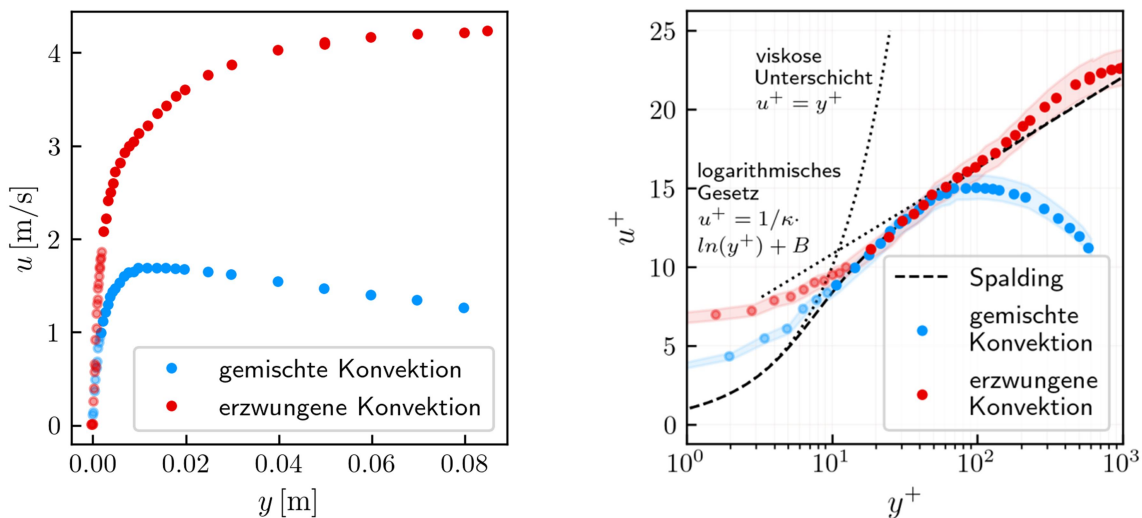


Abb. 1 a) Dimensionsbehaftetes Geschwindigkeitsprofil in der turbulenten Grenzschicht. b) Entdimensionalisiertes Geschwindigkeitsprofil u^+, y^+ mit geschätztem u_τ und y_0 einschließlich einer 5% Fehlerbandbreite von u_τ .

Einerseits wird das logarithmische Gesetz ungültig, sobald die Auftriebskräfte die Strömung dominieren (gemischte Konvektion). Andererseits konnte die viskose Unterschicht experimentell nicht aufgelöst werden. Es ist nicht bekannt, welcher Bereich innerhalb der Pufferschicht in Abhängigkeit von den Auftriebskräften noch gültig ist. Um ein zuverlässiges u_τ zu erhalten, ist es daher entscheidend, die viskose Unterschicht aufzulösen. Klassische Messverfahren wie die Ölfilminterferometrie wurden bereits erfolgreich für die Messung der Mantelreibung in Rohr- und Kanalströmungen eingesetzt (Tanner, 1976). Solche Verfahren erfordern jedoch eine feste Oberfläche, an der die Luftströmung Reibung erfährt. In Anlagen wie der SETCOM-Anlage, in der ein Kondensatfilm an der Wand erzeugt wird, sind solche Techniken nicht durchführbar. Ein alternatives klassisches System, wie das Hitzdrahtanemome-

ter, steht innerhalb einer Grenzschicht vor zwei grundsätzlichen Problemen: Der Wärmeverlust an der Wand des Hitzdrahtes würde zu einem falschen Geschwindigkeitsergebnis führen (Orlü, et al., 2010). Selbst mit einem Korrekturfaktor würde dies die Wärmestrommessungen lokal verzerren. Ein weiterer Aspekt ist die Störung der Strömung durch den Draht und den Halter selbst (Orlü, et al., 2010). Die anspruchsvollen Bedingungen in der SETCOM-Anlage, wie z. B. die Temperaturschwankungen, die durch das Kondensieren und Verdampfen von Wasser auf dem Draht verursacht werden, würden das Material jedoch schnell brechen lassen. Mit anderen Worten: Klassische Systeme beeinflussen die wandnahe Geschwindigkeit - sofern überhaupt messbar - und machen die Ergebnisse unzuverlässig. Daher werden nicht-intrusive Messverfahren wie laserbasierte Techniken bevorzugt. Ein gut untersuchtes nicht intrusives Lasersystem ist die Laser-Doppler-Velocimetrie (LDV) (Albrecht, et al., 2003; Zhang, 2010). In den letzten Jahrzehnten wurde jedoch in mehreren Studien festgestellt, dass die Genauigkeit der wandnahen Messung durch die Größe des LDV-Messvolumens (typischerweise 1-2 mm lang und 100 μm breit) begrenzt ist. Das LDV-System bestimmt die Geschwindigkeiten durch Mittelung aller erhaltenen Signale aus dem gesamten Volumen. Daher kann ein starker Geschwindigkeitsgradient in Wandnähe nicht erfasst werden, was zu verfälschten Geschwindigkeitswerten führt. Um dieses Problem zu überwinden, haben Büttner et al. (Czarske, 2001; Czarske, et al., 2002; Büttner, 2004) ein verbessertes LDV-System entwickelt, den so genannten "LDV Profilsensor". Die Idee des LDV-Profilsensors besteht darin, ein Geschwindigkeitsprofil innerhalb eines Messvolumens zu erfassen, ohne das System traversieren zu müssen. Ort und Geschwindigkeit der in das Volumen eintretenden Partikel können gleichzeitig gemessen werden, was eine höhere räumliche Auflösung im Vergleich zu einem klassischen LDV-System ermöglicht. Ein wichtiger Vorteil ist, dass die Größe des Volumens an den erwarteten Bereich des Geschwindigkeitsprofils angepasst werden kann, der von Interesse ist.

In diesem Beitrag stellen wir einen Bragg-shifted LDV Profilsensor der Firma *ILA R&D* mit zwei Nd:YAG-Lasern ($\lambda = 532 \text{ nm}$ und $\lambda = 561 \text{ nm}$) und einem großen Arbeitsabstand von 500 mm und einer Messvolumenlänge von 4 mm vor. Die Länge des Messvolumens ermöglicht uns, die viskose Unterschicht einer turbulenten Strömung räumlich aufzulösen. Darüber hinaus stellen wir eine Methode zur Datenanalyse vor, um die Schergeschwindigkeit iterativ zu bestimmen.

Versuchsaufbau und Geschwindigkeitsdatenerfassung

Die SETCOM Versuchsanlage, Abb. 2, wurde konzipiert, um CFD-Daten für die Entwicklung und Validierung von Wandkondensationsmodellen zu liefern. Bei der Anlage handelt es sich um einen geschlossenen Strömungskanal mit quadratischem Querschnitt ($0,44 \times 0,44 \text{ m}^2$) und einer Lauflänge von 6 m. Der wesentliche Teil des Versuchsaufbaus ist in Abb. 3 schematisch dargestellt. Die Oberfläche, auf der die Grenzschicht vermessen wird, besteht aus einer Aluminiumlegierung AlMg4,5Mn, was die optische Vermessung aufgrund der Streuungen erheblich erschwert. Deshalb wurde zur Unterdrückung der Streuung ein absorptives Neutraldichte Filterglas mit AR Beschichtung ($\lambda = 350 - 700 \text{ nm}$) von *Thorlabs* eingelassen. Der Luftstrom wird durch ein Gebläse mit einer variablen Geschwindigkeit zwischen $u = 1 - 5 \text{ m/s}$ erzeugt. Zum Seeding wurde polydispersiertes Diethylhexylsebecat (DEHS) als Tracer (mittlere Partikelgröße $0,2 \mu\text{m}$) in der Umlenkung des Kanals injiziert. An der Messstelle dient Quarzglas als optischer Zugang. Der LDV-Profilsensor wurde vor dem Eintrittsfenster mit einem Abstand zur Aluminiumoberfläche (mit Filter) von $d \approx 500 \text{ mm}$ montiert, was der Brennweite der Laserfrontlinse entspricht.

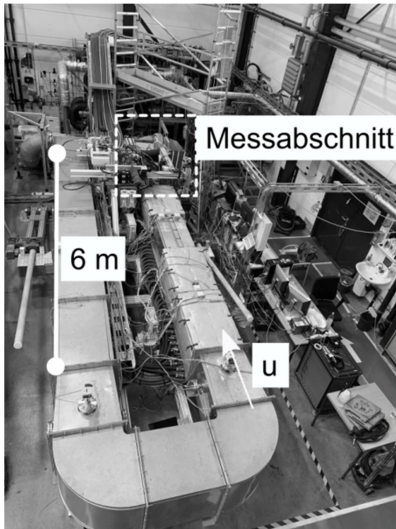


Abb. 2 SETCOM Versuchsanlage.

festgelegt, was einer Reynoldszahl von $Re \approx 300\,000$ (turbulent) entspricht. Die Dicke der viskosen Unterschicht wird theoretisch bei den eingestellten Strömungsbedingungen auf 1,3 – 2,0 mm vorhergesagt. Das Messvolumen von 4 mm ermöglicht es uns also, die gesamte viskose Unterschicht zu erfassen, ohne das Messvolumen traversieren zu müssen. Zur Erfassung der restlichen Grenzschicht wurde eine Traversierungseinheit verwendet.

Das LDV System wurde im Rückstreumodus genutzt und so optisch zu den Fotodetektoren geleitet. In anderen Arbeiten wurde gezeigt, dass ein Fenster zwischen Sensor und Messvolumen zwar die Brennweite verschiebt, aber die Kalibrierkurve in ihrer Steigung nicht beeinflusst (Shirai, et al., 2008), wenn der Sensor mit der Wandnormale des Fensters ausgerichtet ist. In unseren eigenen Untersuchungen konnten wir keinen signifikanten Einfluss auf die Messgenauigkeit feststellen, wenn die optische Achse des Sensors zur Wandnormalen der Glasoberfläche geneigt war. Ein leichter Winkel von $\alpha = 2^\circ$ ermöglichte eine optische Blockierung des reflektierten Laserlichts an der Glasoberfläche sowie Aluminiumoberfläche (bzw. Filter) und verringert somit das Hintergrundrauschen auf dem Detektor.

Bei der vorgestellten Kanalströmungsmessung wurde die Eintrittsgeschwindigkeit der Strömung auf $u_{Bulk} \approx 1\text{ m/s}$

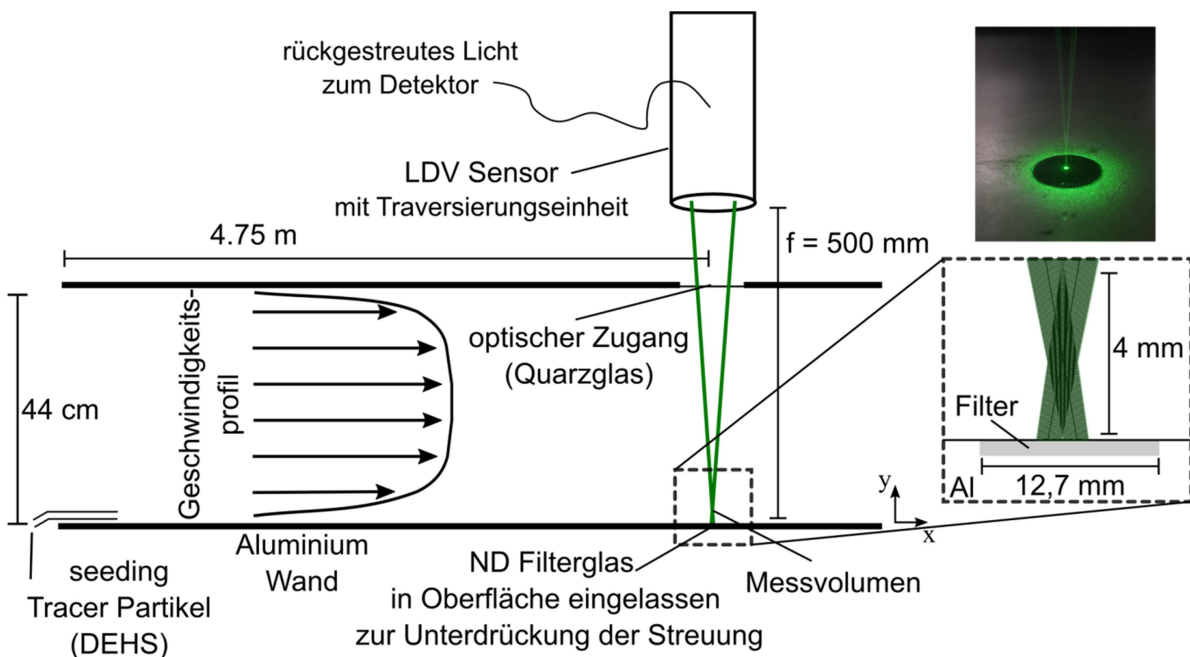


Abb. 3. Versuchsaufbau der optischen Vermessung des Grenzschichtprofil mittels LDV Profilsensor. Durch die Implementierung eines absorptiven Neutraldichte Filterglases in die Aluminium Oberfläche konnte die Streuung des Lasers unterdrückt werden.

Bestimmung der Schergeschwindigkeit aus der viskosen Unterschicht

Die Schergeschwindigkeit u_τ kann aus dem zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht mit Hilfe der Wandgesetze bestimmt werden (White, 1974). Die Linearität einer voll entwickelten turbulenten Grenzschicht ist gegeben im Bereich von:

$$0 \leq u^+ = y^+ \leq 5 \quad (2)$$

Die Geschwindigkeitsrohdaten des LDV Profilsensor und die Ergebnisse der Datenanalyse sind in Abb. 4 dargestellt.

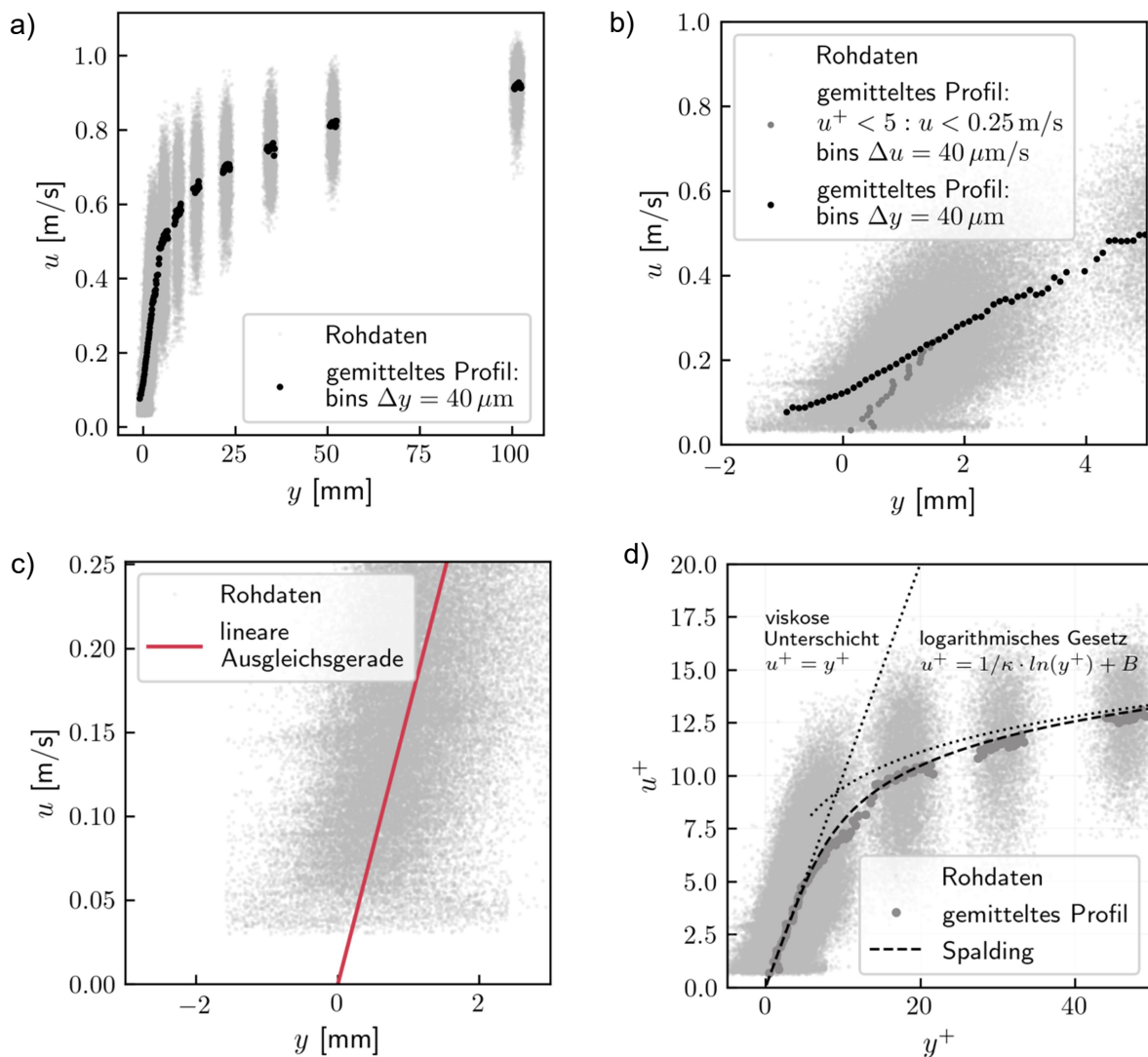


Abb. 4 a) Gemessenes Geschwindigkeitsprofil einer turbulenten Grenzschicht mittels LDV Profilsensor. b) Vergleich der gemittelten Geschwindigkeitsprofile unter Anwendung verschiedener Binning Vorgänge. (schwarz) Die Daten wurden im gesamten Profil entlang y eingeteilt. (grau) Die Daten wurden für $u^+ < 5$: $u < 0.25 \text{ m/s}$ entlang u eingeteilt. c) Linearisierung der Geschwindigkeitsdaten in der viskosen Unterschicht. d) Entdimensioniertes Geschwindigkeitsprofil mit einer Referenz zur Spalding Funktion mit $\kappa = 0.41$ und $B = 3.8$. Das gemittelte Profil wurde innerhalb der viskosen Unterschicht mit einem Binning entlang u und außerhalb entlang y gebildet.

Die Daten weisen Schwankungen auf, die außerhalb der viskosen Unterschicht den turbulenzbedingten Schwankungen von $u(t)$ um einen Mittelwert \bar{u} mit einer Varianz von σ_u entsprechen. Innerhalb der viskosen Unterschicht sind allerdings keine Schwankungen durch Turbulenzen zu erwarten. Die Streuungen der Geschwindigkeitsdaten innerhalb der viskosen Unterschicht, Abb. 4b, sind durch das Messsystem selber hervorgerufen und stellen die Messgenauigkeit des Systems dar. In vorbereitenden Studien konnte allerdings gezeigt werden, dass die Messgenauigkeit der Position durch Erhöhung der Anzahl der Messdaten erhöht werden kann und die Messgenauigkeit der Geschwindigkeit jedoch dadurch nicht beeinflusst wird. Wichtig ist an dieser Stelle zu erwähnen, dass durch die dominierende Geschwindigkeitsfluktuation außerhalb und die dominierende Positionsfluktuation (Messgenauigkeit Position der Partikel im Messvolumen) innerhalb der viskosen Unterschicht ein reines Binning der Daten entlang der Positionachse, wie es in anderen Arbeiten bereits verwendet wurde (Burgmann, et al., 2021; Shirai, et al., 2008), zu einer fehlerhaften Darstellung der mittleren Geschwindigkeitskurve führt, siehe Abb. 4b. Die mittlere Geschwindigkeit kann außerhalb der viskosen Unterschicht weiterhin mit einem Binning entlang y erfolgen, muss aber innerhalb der viskosen Unterschicht mit einem Binning in u umgesetzt werden.

Um eine Fortpflanzung eines durch das Binning hervorgerufenen Fehlers zu vermeiden, werden zur Ermittlung der Schergeschwindigkeit u_τ allerdings ausschließlich gestreute Rohdaten anstelle des gemittelten Profils innerhalb der viskosen Unterschicht verwendet. Da zur Ermittlung der oberen Grenze $u^+ = y^+ = 5$ der Parameter u_τ bereits benötigt wird, wird im ersten Schritt ein u_τ geschätzt. Ausgehend von der anfänglichen Annahme berücksichtigt der Algorithmus alle Daten, die im Bereich von Gleichung (2) erfasst wurden, für eine lineare Regression. Die Regression wird im Dimensionsraum durchgeführt, der wie folgt gegeben ist:

$$y(u) = \frac{v}{u_\tau^2} u^+ + y_0 \quad (3)$$

wobei y_0 einen zu erwartenden Wandabstandsversatz aufgrund von experimentellen Ausrichtungsfehlern angibt. Der Algorithmus verwendet jeweils das resultierende u_τ aus jeder Anpassungsroutine und wiederholt die Anpassung mit korrigierten Datenbereichen, bis der u_τ - Wert konvergiert. Dadurch konnte im gezeigten Beispiel ein Schergeschwindigkeit von $u_\tau = 0.0505 \pm 0.0003$ m/s und der Wandabstandsversatz von $y_0 = (8.8 \pm 0.2)$ μm bestimmt werden, Abb. 4c. Für die Linearisierung wurden $N = 43076$ Datenpunkte innerhalb der viskosen Unterschicht berücksichtigt, so dass davon ausgegangen wird, dass die Ergebnisse signifikant sind.

Abb. 4d zeigt das entdimensionierte Geschwindigkeitsprofil. Um die Zuverlässigkeit der Ergebnisse zu beurteilen, wurde zusätzlich das bekannte Modell von Spalding als Referenz eingezeichnet (White, 1974). Sowohl die entdimensionierten Rohdaten als auch das gemittelte Geschwindigkeitsprofil stimmt mit dem Verlauf des Spaldingprofils überein. Es ist erwähnenswert, dass die entsprechenden Größengrenzen, die für $u^+ = y^+ \leq 5$ berücksichtigt wurden einer Spannweite von 1565 μm entspricht. Das heißt, innerhalb dieser Spannweite ist der LDV Profilsensor in der Lage einen Gradienten aufzulösen aus dem die Schergeschwindigkeit u_τ bestimmt werden konnte.

Zusammenfassung und Ausblick

Geschwindigkeitsprofile in der turbulenten Grenzschicht des SETCOM Strömungskanal wurden mittels eines LDV Profilsensors vermessen, der eine räumliche Auflösung innerhalb des Messvolumens und damit eine Erfassung der viskosen Unterschicht ohne Traversierung des Systems ermöglicht. Trotz des räumlichen Abstands zwischen Sensorkopf und Messvolumen konnte mit dem System eine Spannweite von $1565 \mu\text{m}$ ($0 \leq y^+ \leq 5$) innerhalb der viskosen Unterschicht aufgelöst werden, aus der wir u_τ bestimmen konnten.

Die Daten wiesen Streuungen sowohl außerhalb als auch innerhalb der viskosen Unterschicht auf. Außerhalb konnten diese den turbulenten Bedingungen zugeordnet werden, während innerhalb der viskosen Unterschicht die Streuungen bedingt durch die Messgenauigkeit des Systems zu beobachten waren.

Durch die Entwicklung eines Algorithmus konnte mit einer einfachen linearen Regressionsmethode die Schergeschwindigkeit u_τ aus den Rohdaten der viskosen Unterschicht iterativ ermittelt, was uns eine von Turbulenzmodellen unabhängige Analyse ermöglicht. Die Anpassungsmethode führte zu einer guten Übereinstimmung mit der etablierten Theorie (Spalding Modell) in Bezug auf die skalierten Geschwindigkeitsprofile u^+ und y^+ .

Damit ist es mit der vorgestellten Messmethodik in Zukunft möglich, die Schergeschwindigkeit für gemischte Konvektion experimentell präzise zu erfassen und als Grundlage für die CFD-Modellentwicklung zur Verfügung zu stellen. Jedoch erhöhen sich mit steigender Fluidgeschwindigkeit - und damit geringerer Grenzschichtdicke - die Anforderungen an das Messsystem bzgl. Messgenauigkeit. In zukünftigen Messreihen sollen daher die Grenzen des Systems und der dargestellten Auswertalgorithmen ausführlich untersucht werden.

Dankesworte

Die experimentellen Arbeiten wurden und werden in enger Kooperation zwischen der RWTH Aachen und dem Forschungszentrum Jülich durchgeführt und vom Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz, nukleare Sicherheit und Verbraucherschutz (SETCOM-2, Projektnummer **1501591**) sowie dem Bundesministerium für Wirtschaft und Energie (SETCOM-1, Projektnummer **1501489**) gefördert.

Literatur

- Albrecht, H.-E., et al. 2003.** Laser Doppler and Phase Doppler Measurement Techniques. 2003, pp. 79–165.
- Burgmann, S., et al. 2021.** Flow measurements in the wake of an adhering and oscillating droplet using laser-Doppler velocity profile sensor. *Experiments in Fluids*. 2021, Vol. 62.
- Büttner, L. 2004.** *Untersuchung neuartiger Laser-Doppler-Verfahren zur hochauflösenden Geschwindigkeitsmessung*. [ed.] (PhD Thesis). Göttingen : Cuvillier, Princeton, NJ, 2004.
- Cammiade, L. M. F., et al. 2020.** Modelling of wall condensation for mixed convection flows on in-clined walls and design of experiments. *8th OECD/NEA and IAEA Computational Fluid Dynamics for Nuclear Reactor Safety (CFD4NRS-8) Workshop, Paris (France)*. 2020.
- Czarske, J. 2001.** Laser Doppler velocity profile sensor using a chromatic coding. *Measurement Science and Technology*. 2001, Vol. 12, pp. 52–57.
- Czarske, J., et al. 2002.** Boundary layer velocity measurements by a laser Doppler profile sensor with micrometre spatial resolution. *Measurement Science and Technology*. 2002, Vol. 13, pp. 1979–1989.
- Kader, B. 1981.** Temperature and Concentration Profiles in Fully Turbulent Boundary Layers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1981, pp. 1541–1544.
- Kelm, S., et al. 2019.** Development of a multi-dimensional wall-function approach for wall condensation. *Nuclear Engineering and Design*. 2019, Vol. 353, p. 110239.
- Kelm, S., et al. 2021.** The Tailored CFD Package ‘containmentFOAM’ for Analysis of Containment Atmosphere Mixing, H₂/CO Mitigation and Aerosol Transport. *Fluids*. 2021.
- Müller, H., et al. 2016.** Development of a wall condensation model for coarse mesh containment scale applications. *Proceedings of the CFD4NRS-6, Boston, MA, USA*. 2016.

- Orlū, R., Fransson, J. H.M. and Alfredsson, P. H. 2010.** On near wall measurements of wall bounded flows - The necessity of an accurate determination of the wall position. *Progress in Aerospace Sciences*. 2010, Vol. 48, 8, pp. 353–387.
- Shirai, K., et al. 2008.** Near-wall measurements of turbulence statistics in a fully developed channel flow with a novel laser Doppler velocity profile sensor. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*. 2008, Vol. 27, 5, pp. 567–578.
- Tanner, L. H. and Blows, L. G. 1976.** A study of the motion of oil films on surfaces in air flow, with application to the measurement of skin friction. *Journal of Physics E: Scientific Instruments*. 1976, Vol. 9, pp. 194–202.
- V. Kumar, G., et al. 2021.** Implementation of a CFD model for wall condensation in the presence of noncondensable gas mixtures. *Applied Thermal Engineering*. 2021, Vol. 187, p. 116546.
- White, F.M. and Corfield, I. 1974.** *Viscous Fluid Flow*. s.l. : McGraw-Hill, 1974.
- Zhang, Z. 2010.** *LDA Application Methods*. s.l. : Springer Verlag, 2010.