28.GALA-Fachtagung "Experimentelle Strömungsmechanik"

07. – 09. September 2021, Bremen

Rotierende, schallnahe Strömung in einer kleinen Kammer
Rotating, transonic flow in a small chamber

Franz Peters

Ruhr-Universität Bochum, Institut für Thermo- u. Fluiddynamik, Universitätsstraße 150, 44801 Bochum

Rotierende Strömung, Machzahl
Rotating flow, Mach number

Zusammenfassung
Die tangential in eine zylindrische Kammer eintretende, kompressible Strömung wird analytisch dargestellt und experimentell untersucht. Gemessene Druckverläufe stimmen mit berechneten gut überein, wenn die Eintrittsmachzahl angepasst wird. Es zeigen sich starke Druckänderungen gekoppelt an starke Dichteänderungen. Letztere bewirken so starke Lichtablenkung, dass das Zentrum der Strömung einen perfekten Schatten wirft.

Einleitung

Die Strömung durch eine Laval-Düse im Schall- bzw. Überschallbereich wird in nahezu jedem Lehrbuch der Strömungsmechanik beschrieben. Unter den Annahmen 1-dimensional, adiabat und isentrop ergibt sich ein überschaubarer Satz von Gleichungen zur Bestimmung der Strömungsgrößen. Die Frage, welche Bedingung im Grundsatz Schall und Überschall hervorruft und welche Analogie zu anderen Fällen besteht wurde in [1] diskutiert. An dieser Stelle soll ein weiterer Fall angegliedert werden, in dem aus 1-dimensionalen Gleichungen geschlossen werden kann, dass und wie es zu Überschall kommt. Es handelt sich um die rotierende, kompressible Strömung in einer zylindrischen Kammer (hier am Beispiel Luft). Die Strömung tritt am Außenrand tangential ein. Sie vollführt eine spiralige Bewegung hin zum Zentrum, wo sie durch beidseitige Bohrungen austritt. Wir behandeln die Gleichungen, präsentieren Druckmessungen und interpretieren die Dichteverläufe mit dem Schattenverfahren.

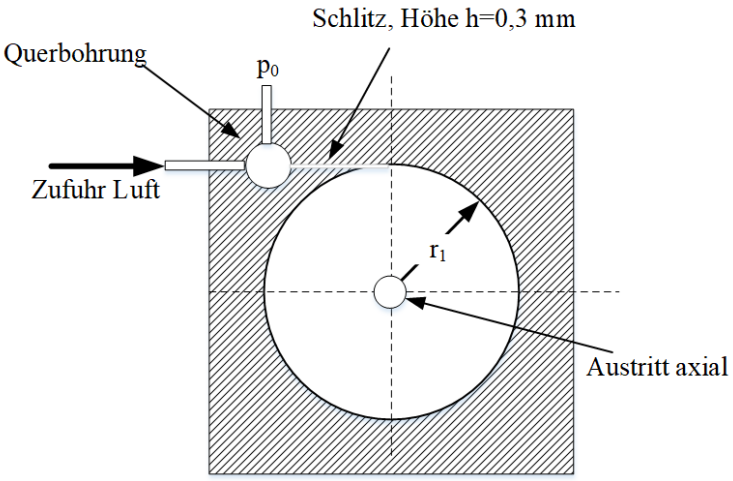

Abb.1: Die prinzipielle Anordnung der zylindrischen Kammer im Schnitt

Theorie

Die Kammer hat den Radius r_1 und die Breite b. Sie ist beidseitig durch Glasscheiben zur Sichtbarmachung bzw. durch Aluminiumscheiben zu Druckmessungen verschlossen. Die Luftzufuhr erfolgt über die Querbohrung und den tangentialen Schlitz. Die Luft verlässt die Kammer durch zentrale Bohrungen in den Scheiben.
Die Schlitzströmung entlässt den Massenstrom $\dot{m}$, der bei r_1 die Umfangsgeschwindigkeit u_1 sowie den Druck p_1 hervorruft. Der zugehörige Drehimpuls $r_1\ u_1$ wird mit dem Massenstrom in radialer Richtung transportiert. Bei $r < r_1$ tritt er mit erhöhter Geschwindigkeit auf, allerdings vermindert um ein gegenläufiges Drehmoment D, das von der Schubspannung an den Seitenwänden herrührt

$$-u_1 r_1 \dot{m} + u\ r\ \dot{m} = -D \qquad (1)$$

Druckkräfte sind in tangentialer Richtung nicht zu berücksichtigen. In radialer Richtung treten sie in der Impulsbilanz auf mit w für die radialen Komponenten und A für die Umfangsflächen

$$-w_1\ \dot{m} + w\ \dot{m} = p_1 A_1 - pA \qquad (2)$$

Die Leitvariable in kompressiblen Strömungen ist die Machzahl M. Mit der Schallgeschwindigkeit $a^2 = \kappa\ R\ T$ (Isentropenexponent κ mal Gaskonstante R mal Temperatur T) transformieren wir Gln.(1,2), wobei zu der Machzahl der Umfangsströmung die radiale Machzahl mit dem Index r hinzukommt

$$\frac{a}{a_1} = \frac{r_1 M_1}{r\ M(r)}\left[1 - \frac{D}{\dot{m}\ a_1 r_1 M_1}\right] \qquad (3)$$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{\left[M_{1r} + \frac{1}{\kappa M_{1r}}\right]}{\left[M_r + \frac{1}{\kappa M_r}\right]} \qquad (4)$$

Die adiabate Energiegleichung mit kinetischer Energie und Enthalpie erhält folgende Form

$$\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = \frac{\frac{1}{2}\ (\kappa - 1)(M_1^2 + M_{1r}^2) + 1}{\frac{1}{2}\ (\kappa - 1)(M(r)^2\ + M_r^2) + 1} \qquad (5)$$

Im Experiment gilt $M_r << M$. Unter dieser Voraussetzung erhält man durch Elimination der Schallgeschwindigkeiten aus Gln.(3, 5)

$$\frac{P(M_1)}{P(M)} = \frac{{r_1}^2}{r^2}\left[1 - \frac{D}{\dot{m}\ a_1 r_1 M_1}\right]^2 \qquad (6)$$

wobei die Funktion P(M) an jeder Stelle r (also auch r_1) gilt

$$P(M)\ = \frac{\frac{1}{2}\ (\kappa - 1)M^2 + 1}{M^2} \qquad (7)$$

Abb.2 zeigt die mit steigendem M stetig fallende Funktion P(M). Da $r_1 > r$ gilt mit Gl.(6,7) $M > M_1$. Die Machzahl steigt also stetig zum Zentrum der Kammer. Voraussetzung ist noch, dass $\beta = \frac{D}{\dot{m}\ a_1 r_1 M_1}$ klein ist, was im Experiment zutrifft.

Bei gegebenem M_1 bekommt man aus Gln.(3, 5) die Gl.(8) für M(r) sowie die Gl.(9) für den Radius, bei dem M=1 erreicht wird.

GALA e.V., Karlsruhe, Germany, ISBN 978-3-9816764-7-1

$$M(r) = \left[\frac{\frac{1}{2}\,(\kappa - 1) M_1^2 + 1}{{M_1}^2 \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 (1-\beta)^2} - \frac{1}{2}\,(\kappa - 1) \right]^{-1/2} \qquad (8)$$

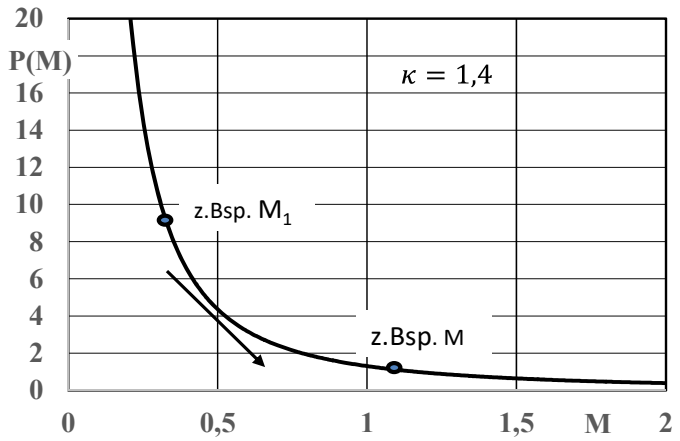

Abb.2: Die Funktion P(M)

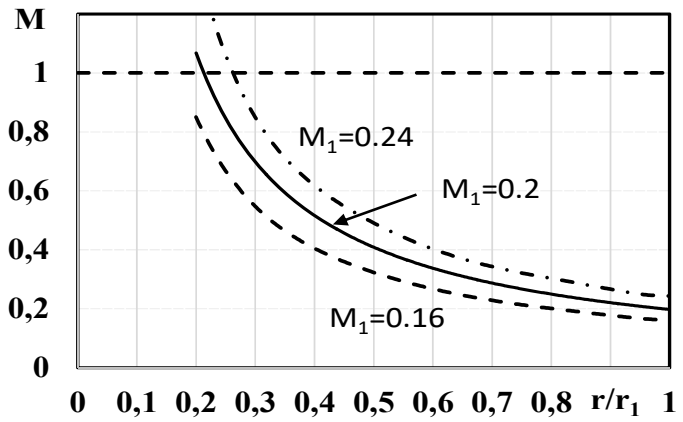

Abb.3: Machzahl Verlauf $M(r/r_1)$ aus Gl.(8), (β=0)

$$\frac{r}{r_1} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}\,(\kappa - 1)}{\frac{1}{M_1^2} + \frac{1}{2}(\kappa - 1)}} \qquad (9)$$

Soweit wurde zwar adiabate, jedoch keine isentrope Zustandsänderung gefordert. Um den Druckverlauf p/p_1 mit der Machzahl zu verknüpfen ist dies allerdings notwendig. Die Verknüpfung mit Gl.(5) lautet dann

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\kappa-1} = \frac{T}{T_1} = \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \qquad (10)$$

Druck-, Dichte- und Temperaturverlauf ergeben sich also aus der Verwendung von Gl.(8) in Gl.(5) und weiter in Gl.(10).

Experiment

Zu Abb.1 sind zu ergänzen: b=20mm, r_1=14mm Austrittsbohrung $\emptyset \equiv 5\,mm$. Die Zuluft wurde einem Kompressorkessel entnommen. Druckmessungen erfolgten an radialen Positionen durch Druckbohrungen in den Seitenwänden aus Aluminium ($\emptyset \equiv 0.6\,mm$). Druck p_0 und Temperatur T_0 konnten in der Querbohrung erfasst werden.
Der Massenstrom $\dot{m}$ wurde durch eine der Kammer nachgeschaltete Messung jeweils bestimmt. Er liegt in der Größenordnung 5 g/s .
Das Ziel der Untersuchung besteht darin, gemessene Druckverläufe über r mit den theoretischen Voraussagen zu vergleichen. Das Kernproblem dieses Vergleichs besteht in der Kenntnis von M_1 bei r_1. Denn: Die Theorie benötigt ein $M_1(r_1)$, das auf dem ganzen Umfang gilt, gebunden an einen radialen Massenstrom. Das Experiment ist aber auf die lokale Zufuhr durch den Schlitz angewiesen, dessen Austrittsmachzahl M_1 zwar bestimmbar ist, aber deutlich zu hoch liegt. Zunächst zur Austrittsmachzahl: Aufgrund der Querschnitte ist die kinetische Energie in der Querbohrung sehr viel kleiner als die im Spalt weshalb die adiabate Temperaturabsenkung im Spalt in guter Näherung ergibt

$$T_0 - T_1 = \frac{u_1^2}{2cp} \qquad (11)$$

Mit dem Massenstrom $\dot{m} = \rho_1 u_1\, b\, h$ und der Zustandsgleichung $p_1 = \rho_1 R\, T_1$ extrahiert man die Dichte

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\frac{p_1}{T_0\, R} + \sqrt{\left[\frac{1}{2}\frac{p_1}{T_0\, R}\right]^2 + \frac{\dot{m}^2}{2\, c_p\, T_0 (b\, h)^2}} \qquad (12)$$

Mit dem gemessenen Druck p_1 folgt T_1 aus der Zustandsgleichung, u_1 aus dem Massenstrom und damit M_1

$$T_1 = \frac{p_1}{\rho_1\, R} \qquad (13)$$

$$u_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1\, bh} \qquad (14)$$

$$M_1 = \frac{u_1}{\sqrt{\kappa\, R\, T_1}} \qquad (15)$$

Zur Abschätzung von $M_1(r_1)$, die als Randbedingung zu benutzen wäre, kann ein Übergang geschaffen werden in Form eines Ansatzes zum Impulsabbau entlang der Außenwand. D_1 stellt ein an der Wand durch Schubspannung erzeugtes Drehmoment dar, das den Austrittsimpuls abbaut. h* ist ein Maß für die Dicke der Scherschicht, als solches ein freier Parameter, z.B. h/8

$$D_1 = 2\pi\, b\, r_1^2 \nu\, \rho_1 \frac{u_1}{h^*} \qquad (16)$$

Durch den Impulsverlust wird die Geschwindigkeit u_1 zu u_{1c} korrigiert

$$u_{1c} = u_1 - \frac{D_1}{r_1\, \dot{m}} \qquad (17)$$

Dieser Ansatz weist in die richtige Richtung, Geschwindigkeit und Machzahl werden stark reduziert, wenn h* klein genug gewählt wird. In Abbn.4a,b finden sich zwei gemessene Druckverläufe bei p_0=3 bzw. 6 bar (absolut). Die theoretischen Verläufe zeigen für die angepassten Machzahlen 0.17 bzw. 0.21 sehr gute Übereinstimmung. Die entsprechenden

Austrittsmachzahlen liegen bei 0.26 bzw. 0.5. Mit Gl.(9) erreichen wir im zweiten Fall gerade Schallgeschwindigkeit.

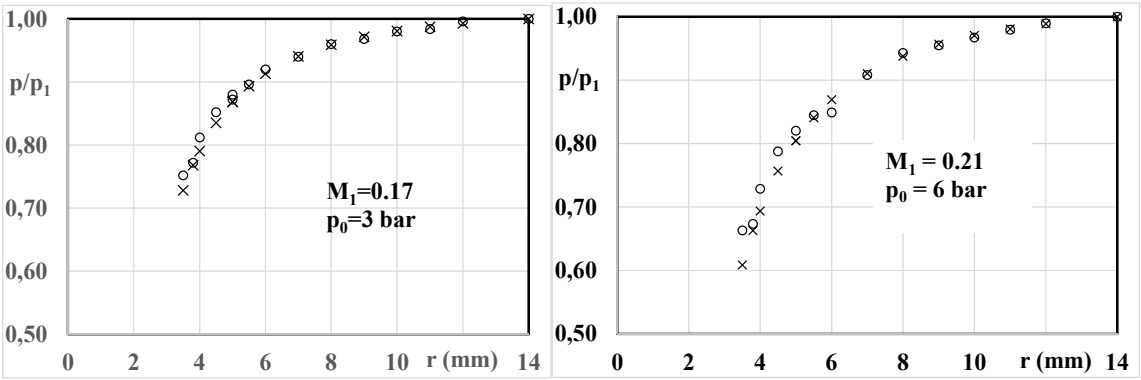

Abb.4a,b: Experimentelle (o) bzw. berechnete (x) Druckverläufe. M_1 angepasst

Sichtbarmachung

Die Kammer wird axial von parallelem Licht durchstrahlt, das von einem Parabolspiegel kommt, der von einer Quecksilberhochdruckdampflampe beleuchtet wird. Hinter der Kammer steht im Abstand a ein Schirm, auf dem die Schattenbilder der Strömung sichtbar werden und fotografiert werden können. Die Dichteverteilung ähnelt gemäß Gl.(10) der Druckverteilung: Ein sehr großer Gradient verschwindet mit steigendem Radius.
Der Brechungsindex n(r) in der Strömung folgt dem Gesetz nach Gladstone-Dale [2] mit der gleichnamigen Konstante K, hier K=0.226 10^{-3}

$$n(r) = K\,\rho(r) + 1 \qquad (18)$$

Ein Strahl, der die Kammer bei r durchtritt, wird auf dem Schirm um den Weg Δ(r) in radialer Richtung steigender Dichte abgelenkt.

$$\Delta(\mathrm{r}) = a\left[\frac{b}{n(r)}\frac{d\,n(r)}{dr}\right] \qquad (19)$$

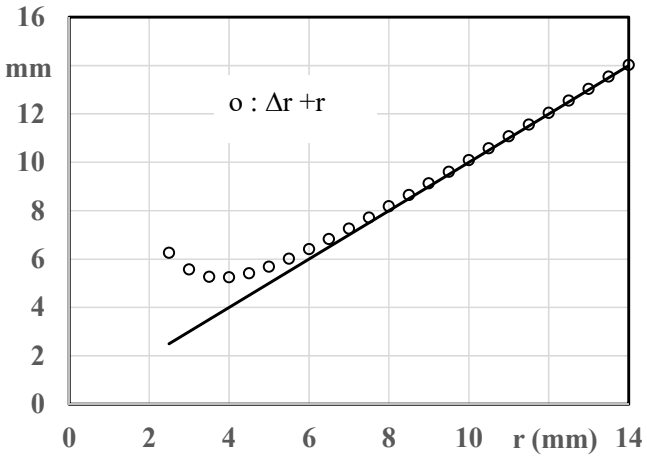

Abb.5.: Berechnete Auslenkung einzelner Strahlen im Schattenbild bei a=850mm vor der Kammer

Er landet also bei (Δr + r) auf dem Schirm (a=850mm), dargestellt in Abb.5. Am Rand der Austrittsbohrung beträgt (Δr) etwa 3.7 mm, lässt dann nach, stagniert, um schließlich asymptotisch zu verschwinden.
Diese Verteilung erklärt die Helligkeitsverteilung in Abb.6. In den dunklen Bereich um das Austrittsloch fällt kein Strahl. Die Stagnation bewirkt eine Aufhellung, die schließlich in eine gleichmäßige Ausleuchtung übergeht. Das Austrittsloch selbst bleibt diffus, weil hier die Strömung axial und turbulent verläuft.

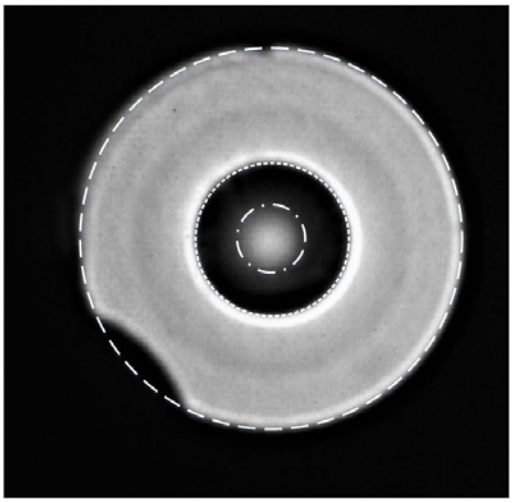

Abb.6: Schattenbild der rotierenden Strömung. Der äußere Kreis (weiß gestrichelt) markiert den Kammerdurchmesser, der innere dem Auslass, der dritte den Ort des ersten abgelenkten Strahls. (Der Fleck unten links ist der Schatten einer Befestigung.)

Schluss

Impuls- und Energiebilanz zeigen eine stetig steigende Machzahl einer rotierenden Strömung in einer Kammer. Der damit verbundene Druckabfall wurde gemessen. Er entspricht den Voraussagen, wenn die Ausgangsmachzahl am Kammerrand angepasst wird. Der korrespondierende Dichteabfall wird durch eine Schattenaufnahme eindrucksvoll sichtbar. Die experimentellen Grenzen lagen soweit etwa bei Erreichen der Schallgeschwindigkeit. In der nächsten Entwicklungsstufe wird der Massenstrom erhöht um deutlich in den Überschallbereich zu kommen.
Die in kleinem Maßstab realisierte transonische Strömung ist besonders interessant hinsichtlich der zu erreichenden niedrigen Temperaturen und der damit verbundenen Kondensationsphänomene.

[1] F.Peters (2003): A compact presentation of gasdynamic fundamentals
Forschung im Ingenieurwesen vol.68(2), 111-119

[2] W.Merzkirch (1987): Flow Visualization, Second Edition. Academic Press, New York.