7.-9. September 2021, Bremen

# Korrelations- und Spektralschätzung aus LDA-Daten — ein genauerer Blick

## Correlation and Spectral Density from LDV data — a detailed view

H. Nobach<sup>1</sup>, N. Damaschke<sup>2</sup> und V. Kühn<sup>3</sup>

 <sup>1</sup>Max-Planck-Institut für Dynamik und Selbstorganisation, Am Faßberg 17, 37077 Göttingen
 <sup>2</sup>Institut für Allgemeine Elektrotechnik, Universität Rostock, Fakultät für Informatik und Elektrotechnik, Albert-Einstein-Straße 2, 18059 Rostock

<sup>3</sup>Institut für Nachrichtentechnik, Universität Rostock, Fakultät für Informatik und Elektrotechnik, Richard-Wagner-Str. 31, 18119 Rostock-Warnemünde

ungleichmäßige Abtastung, Laser-Doppler-Anemometrie, Korrelation, Spektrum non-regular sampling, laser Doppler velocimetry, correlation, spectrum

## Zusammenfassung

Bei den zurückliegenden Untersuchungen zu Verfahren der Verarbeitung von ungleichmäßig abgetasteten Daten aus Strömungsmessungen mit der Laser-Doppler-Anemometrie (LDA) zu Autokorrelationsfunktionen und spektralen Leistungsdichten konnte ein vorläufiger Gleichstand zwischen der direkten Spektralschätzung, der Slotkorrelation, der Quantisierung der Ankunftszeiten und, mit gewissen Abstrichen, der Interpolation mit einer Entfaltung zur Korrektur dynamischer Fehler bei der Rekonstruktion des Signals festgestellt werden. Mittlerweile sind sowohl die Verfahren zur Signalverarbeitung ungleichmäßig abgetasteter Signale als auch die Methoden zur Rechnersimulation präzise und verlässlich genug, einen detaillierteren Blick auf verborgene oder vernachlässigte Restfehler zu richten. Die unterschiedlichen Stellen in der Abfolge der Signalverarbeitung, an denen die letztendlich immer nötige Quantisierung der Zeit und der Frequenz erfolgen, bewirken im Detail Qualitätsunterschiede der Schätzung der Autokorrelationsfunktion und des Leistungsdichtespektrums zwischen den oben genannten Verfahren, die untersucht und analysiert werden. Darüber hinaus soll dieser Beitrag auch die lange vorgebrachten Zweifel klären, die lokale Normierung bringe durch die Quotientenbildung von zwei Zufallsgrößen neben der Verringerung der Schätzvarianz auch einen neuen systematischen Fehler mit, und die Slotkorrelation mit der Verteilung der Produkte von Messwerten auf die beiden angrenzenden Intervalle der Zeitverschiebung (Fuzzy Slotting) sei eine Tiefpassfilterung.

## 1 Einführung

Mit den Untersuchungen in [9, 24] gab es einen vorläufigen Endstand im Vergleich zwischen den verschiedenen Verfahren zur Verarbeitung von Laser-Doppler-Daten zu Autokorrelationsfunktionen und Leistungsdichtespektren. Im direkten Vergleich befanden sich

- Slotkorrelation [18, 27] mit Aufenthaltszeitgewichtung (transit time weighting) [4, 14, 15], ohne Selbstprodukte [14, 17, 19, 29], optional mit Verteilung der Produkte von Messwerten auf die beiden angrenzenden Intervalle der Zeitverschiebung (Fuzzy Slotting) [19, 21, 25, 31] und optional mit lokaler Normierung [19, 20, 29, 30, 31, 32],
- Direkte Spektralschätzung [11, 17, 27] mit Aufenthaltszeitgewichtung [5, 6, 7, 13, 14, 33, 34, 35], ohne Selbstprodukte [4, 12, 14, 22, 35], mit Normierung [5, 22], optional mit einem spektralen Äquivalent zu Fuzzy Slotting und optional mit lokaler Normierung [23]

- Quantisierung der Ankunftszeiten [5, 27] mit Aufenthaltszeitgewichtung, ohne Selbstprodukte, optional mit lokaler Normierung [8],
- Sample-and-Hold-Interpolation und äquidistante Wiederabtastung [2, 3] mit Invertierung (Entfaltung) der Matrix des dynamischen Fehlers [26, 28].

Weitere Optionen oder Varianten wie Vorwärts-Rückwärts-Ankunftszeitgewichtung, die Einbeziehung von Selbstprodukten, variable Fenster oder andere Interpolationsvorschriften werden nicht mehr betrachtet, da sie bei Anwendung auf reale Laser-Doppler-Daten nicht robust oder nicht effektiv genug sind oder weil die Korrelationsfunktion bzw. das Leistungsdichtespektrum generell nicht erwartungstreu geschätzt werden.

Werden die oben aufgeführten Verarbeitungsverfahren unter identischen Randbedingungen, mit gleichen Einstellungen und äquivalenten Optionen, z. B. einheitlicher Gewichtung der Messwerte verwendet, dann sind die zu erwartenden Ergebnisse in weiten Grenzen auch gleichwertig, nämlich bezüglich Erwartungstreue der geschätzten Korrelationsfunktionen und Spektren und deren Schätzvarianzen. Die Interpolation bleibt dabei hinter den anderen drei Verfahren etwas zurück, da weder die Gewichtung der Messwerte mit individuellen Gewichten, speziell der Aufenthaltszeit, Abweichungen der Abtaststatistik von der rein zufälligen Abtastung noch der Abzug von Selbstprodukten von Messwerten als Maßnahme zur Rauschunterdrückung möglich sind. Aber auch wenn zumindest die anderen drei Verfahren keine offensichtlichen Unterschiede in ihrer Schätzqualität aufweisen, so führen sie für die Weiterverarbeitung notwendige zeitliche Quantisierungsschritte an unterschiedlichen Stellen der Verarbeitungskette ein und liefern am Ende der Verarbeitung geringfügig unterschiedliche Schätzergebnisse.

In einer Reihe von numerischen Tests mit präzisen Simulationen der Messwertaufnahme durch das LDA sowie der Signalverarbeitung und mit vielen zu mittelnden Realisierungen des gesamten Prozesses werden einzelne Einflussfaktoren wie die Bevorzugung von großen Geschwindigkeitsmesswerten, Rauschen der Messwerte oder die Prozessortotzeit untersucht und deren Wirkung auf die verschiedenen Verfahren gezeigt. Die verwendeten Simulations- und Analyseprogramme sind als Python-Quelltext unter [1] frei zugänglich.

## 2 Rein zufällige Abtastung

Um die Eigenschaften der verschiedenen Verarbeitungsverfahren der ungleichmäßig abgetasteten Daten zu Schätzungen der Korrelationsfunktion und des Leistungsdichtespektrums unter idealen Randbedingungen als Referenz zu bestimmen, werden in einer ersten Simulationsrunde rein zufällige Abtastzeitpunkte eines linearen stochastischen Prozesses generiert. Der stochastische Prozess ist ein Moving-Average- (MA-) Prozess der Ordnung 1000. Die Koeffizienten des MA-Prozesses sind so gewählt, dass der simulierte Prozess ein charakteristisches Spektrum mit einer exponentiell abfallenden Leistungsdichte hat mit einer ausgeprägten Delle im mittleren betrachteten Frequenzbereich. In so einem synthetischen Spektrum lassen sich systematische Abweichungen der Spektralschätzung durch dynamische Fehler gut erkennen. Der simulierte Verlauf des Prozesses wird dann in einem zweiten Schritt an rein zufälligen Zeitpunkten abgetastet mit einer mittleren Abtastrate von einer Abtastung pro Zeiteinheit (ZE), die beliebig festgelegt werden kann. Bei dieser ersten Simulationsreihe ist der simulierte Prozess mittelwertfrei, es erfolgt keine Bevorzugung von großen Geschwindigkeitswerten (also kein statistischer Bias), die simulierten Messwerte sind rauschfrei und die Abtastzeitpunkte sind unabhängig voneinander. Abb. 1 zeigt einen Ausschnitt eines generierten Signals sowie die aus dem gesamten simulierten Signalverlauf bestimmte Wahrscheinlichkeitsdichte der Abtastintervalle. Durch die rein zufällig gewählten Abtastzeitpunkte kommt es zu exponentialverteilten Intervallen zwischen den Abtastzeitpunkten.

Die simulierten Zeitreihen werden anschließend mit den vier betrachteten Verarbeitungsverfahren zu Autokorrelationsfunktionen und Leistungsdichtespektren verarbeitet. Da diese beiden Funktionen über das Wiener-Chintschin-Theorem [16] in einem unmittelbaren Zusammenhang stehen, werden in Abb. 2 nur die Spektren dargestellt. Dynamische Fehler der Signalverarbeitung lassen sich dadurch leicht identifizieren. Da bei dieser Simulation keine Gewichtung der Werte erfolgt und kein

Rauschen überlagert ist, können bei allen Verfahren Selbstprodukte der aufgenommenen Werte in die Verarbeitung einbezogen werden. Die Ergebnisse der Spektralschätzungen in Abb. 2 zeigen keine signifikanten Abweichungen vom synthetischen Spektrum des simulierten Prozesses. Abweichungen treten nur in unmittelbarer Nähe der höchsten aufgelösten Frequenz von  $0.5 \, \text{ZE}^{-1}$  auf. Die Slotkorrelation und die Zeitquantisierung (Abb. 2a und c) verlieren beide die hohe zeitliche Auflösung der simulierten zufälligen Abtastung, die Zeitquantisierung unmittelbar durch die Quantisierung der Abtastzeitpunkte auf ganze Zeiteinheiten, die Slotkorrelation durch entsprechende Quantisierung der Intervalle zwischen je zwei Abtastzeitpunkten. Die Abweichung der geschätzten Spektren gegenüber dem Spektrum des simulierten Prozesses bei den hohen Frequenzen zu etwas zu großen Werten ist charakteristisch für die bei der Verarbeitung der Signale eingeführten Unsicherheit der zeitlichen Zuordnung, äquivalent zu einer zeitlichen Mittelung über die Dauer eines Zeitschritts. Diese bewirkt nämlich eine Umverteilung der spektralen Leistungsdichte über einen breiten Frequenzbereich. Die Verschmierung des Spektrums tritt durch den exponentiell abfallenden Verlauf des Spektrums des simulierten Prozesses als ein breitbandiges Rauschen einer bestimmten Leistungsdichte auf. In der logarithmischen Darstellung des Spektrums erkennt man dann ein Plateau der geschätzten Leistungsdichte, während die Leistungsdichte des simulierten Prozesses zu höheren Frequenzen weiter abnimmt.

Im Gegensatz dazu zeigt die direkte Spektralschätzung (zunächst ohne Fuzzy) in Abb. 2b keinen derartigen dynamischen Fehler. Die Leistungsdichte wird bis zu der höchsten von der Signalverarbeitung aufgelösten Frequenz erwartungstreu geschätzt. Die Interpolation mit entsprechender Entfaltung der dynamischen Fehler bei der Rekonstruktion der Zeitreihe (Abb. 2d) weist stattdessen einen gegenüber der Slotkorrelation und der Zeitquantisierung noch einmal deutlich größeren Fehler durch Unsicherheiten der zeitlichen Auflösung auf. Die Ursache dafür liegt in der Nacheinanderausführung der Rekonstruktion zu einer zeitlich kontinuierlichen Funktion und der anschließenden äquidistanten Wiederabtastung vor der Weiterverarbeitung zu Korrelationsfunktionen und Spektren.

Bei den Verarbeitungsverfahren, die als Varianten die lokale Normierung oder Fuzzy Slotting bzw. das entsprechende Äquivalent für die direkte Spektralschätzung bieten, wurden auch diese getestet. Die Ergebnisse der Simulation und Spektralschätzung für die lokale Normierung zeigen keine Veränderung der geschätzten Spektren gegenüber den Grundvarianten. Demgegenüber zeigen sowohl die Slotkorrelation als auch die direkte Spektralschätzung eine Zunahme der zeitlichen Unsicherheit durch Fuzzy. Die anteilige Verteilung der Produkte von je zwei Abtastwerten der Zeitreihe auf die beiden benachbarten Slots der Zeitintervalle je nach konkreter zeitlicher Feinlage der betrachteten Abtastintervalle führt offensichtlich zu einer Vergrößerung der zeitlichen Unsicherheit, statt zu einer besseren zeitlichen Auflösung, wie ursprünglich beabsichtigt. Die lange vorgebrachte Vermutung, Fuzzy Slotting führe zu einer Tiefpassfilterung kann damit zum Teil bestätigt werden. Andererseits bewirkt eine zeitliche Unsicherheit bei ungleichmäßiger Abtastung eine Verschmierung des Spektrums und keine Dämpfung wie für eine Tiefpassfilterung üblich. Bei der Zeitquantisierung gibt es keine Option für Fuzzy, da die feine Auflösung der Zeitreihe unterhalb der Zeitschritte durch die Quantisierung der Abtastzeitpunkte selbst nicht mehr zur Verfügung steht.



Abbildung 1: a) Ausschnitt eines Beispielsignals und b) empirische Verteilung der Abtastintervalle für rein zufällige Abtastung (mittlere Abtastrate  $1 \text{ ZE}^{-1}$ )



Abbildung 2: Leistungsdichtespektrum, gemittelt über 10 000 Realisierungen für a) Slotkorrelation, b) direkte Spektralschätzung, c) Quantisierung der Ankunftszeit und d) Sample-and-Hold-Interpolation mit Entfaltung

#### 3 Mittelwert, Rauschen, Totzeit

In einer zweiten Simulationsrunde werden die bei rein zufälliger zeitlicher Abtastung auftretenden kurzen Abtastintervalle stark reduziert, was die Wirkung der räumlichen Ausdehnung des Messvolumens eines Laser-Doppler-Systems nachbildet, das in Einzelteilchenauflösung betrieben wird. Damit wird die vorhandene Information der aufgenommenen Zeitreihe bei hohen Signalfrequenzen

reduziert und das Spektrum der Abtastfunktion (die Folge der Abtastzeitpunkte) gefärbt. Die mittlere Abtastrate bleibt dabei unverändert  $1 ZE^{-1}$ . Außerdem wird ein von null verschiedener Erwartungswert des Prozesses simuliert, der als strömungsmechanisches Pendant einem Turbulenzgrad von 25% entspricht. Aus jedem simulierten Datensatz wird der Mittelwert bestimmt und für die Weiterverarbeitung zu Korrelationsfunktionen und Spektren von den simulierten Einzelwerten abgezogen. Die Schätzunsicherheit der Mittelwertbestimmung wirkt sich dabei als systematischer Fehler auf die Korrelations- und Spektralschätzung aus. Eine entsprechende Korrektur ist für alle untersuchten Verfahren zumindest als Approximation nullter Ordnung bekannt und wird standardmäßig durchgeführt (Bessel-Korrektur). Die einzelnen Messwerte werden abschließend von einem breitbandigen Rauschprozess überlagert, wodurch zufällige Fehler der Frequenzbestimmung der Laser-Doppler-Einzelsignale und damit der Geschwindigkeitsbestimmung der einzelnen Streuteilchen nachgebildet werden. Die Bevorzugung von Messwerten durch den Abtastprozess (statistischer Bias des Laser-Doppler-Systems) erfolgt bei dieser Simulation noch nicht, um diesen Einfluss separat analysieren zu können. Abb. 3 zeigt einen Ausschnitt eines so generierten Signals sowie die empirische Wahrscheinlichkeitsdichte der Abtastintervalle. Neben dem Mittelwert der Amplitude sind die deutlich unterrepräsentierten kurzen Abtastintervalle zu erkennen.

Das überlagerte Rauschen der Messwerte äußert sich in einer Zunahme der geschätzten Leistungsdichte in Abb. 4a, für alle untersuchten Verarbeitungsverfahren. Da das Rauschen unkorreliert ist, führt es aber nur bei der Verwendung der Selbstprodukte der simulierten Messwerte zu diesem systematischen Fehler. Da durch die ungleichmäßige Abtastung auch Abtastintervalle zwischen aufeinander folgenden Messwerten unterhalb eines Zeitschritts auftreten, kann auf die Selbstprodukte bei der Bestimmung der Korrelationsfunktion verzichtet werden und stattdessen die Korrelation an der Stelle der Zeitverschiebung null durch Mittelung über Messwertpaare mit sehr kurzen Abtastintervallen erfolgen. Der systematische Fehler durch das Rauschen wird dadurch vollständig ausgeschlossen. Nur die Schätzvarianz des Spektrums unterliegt dann noch dem Einfluss des Rauschens. Die Unsicherheit der Amplitude der simulierten Einzelwerte der Zeitreihe bewirkt ein Zunahme der Schätzunsicherheit der Korrelationsfunktion und des Spektrums. Die Ergebnisse der Spektralschätzung ohne Selbstprodukte sind in Abb. 4b dargestellt. Die Überschätzung der Leistungsdichte durch das Rauschen wird fast vollständig kompensiert. Die direkte Spektralschätzung zeigt einen kleinen Restfehler, in ähnlicher Größenordnung wie die Unsicherheit durch die Zeitquantisierung. Die Slotkorrelation und in noch stärkerem Maße die Zeitquantisierung zeigen ohne die Selbstprodukte einen systematischen Fehler in entgegengesetzte Richtung, nämlich eine Unterabschätzung der Leitungsdichte bei hohen Frequenzen. Das ist allerdings keine Überkompensation des Rauschens sondern ein neuer Fehler, der ebenfalls aus der zeitlichen Mittelung von Wertepaaren bei diesen beiden Verarbeitungsverfahren resultiert. Ohne die Selbstprodukte wird die Korrelation nur noch über Kreuzprodukte von Messwerten mit kurzen Abtastintervallen bestimmt. Besonders kurze Abtastintervalle sind aufgrund der Prozessortotzeit deutlich unterrepräsentiert, sodass vorwiegend Abtastintervalle einer bestimmten Größe, in dieser Simulation etwa 0.5 ZE, gewertet werden. In diesem Bereich der Zeitverschiebung hat die Korrelationsfunktion allerdings starke Gradienten, sodass die Bevorzugung von größeren Abtastintervallen in der Mittelung zu einer Unterabschätzung der Korrelationsfunktion an der Stelle null und damit zu einer Unterabschätzung des Spektrums im gesamten Frequenzbereich führt. Durch die logarithmische Darstellung wird dieser systematische Fehler als Deformation des geschätzten Spektrums bei großen Frequenzen am deutlichsten.

Die Interpolation bietet keine Möglichkeit, die Selbstprodukte aus der Verarbeitung auszuschließen. Dieses Verfahren ist damit grundsätzlich empfindlich gegenüber überlagertem Rauschen und benötigt eine nachträgliche Schätzung der Rauschleistung und Korrektur der Korrelationsfunktion und des Spektrums. Dafür gibt es vielfältige heuristische Methoden, die leider keine Verallgemeinerungen zulassen. Darüber hinaus macht die Interpolation, genauer die Invertierung des dynamischen Fehlers durch die Rekonstruktion, strikte Annahmen über die Verteilung der Abtastintervalle, nämlich dass die Abtastintervalle unabhängig voneinander sind und streng einer Exponentialverteilung folgen. Durch die Absenkung der Wahrscheinlichkeit kurzer Abtastintervalle wird diese Annahme verletzt, was zu einem weiteren verfahrensinherenten systematischen Fehler der Korrelations- und Spektralschätzung führt. Deshalb wird die Interpolation vom weiteren Vergleich der Verfahren ausgeschlossen. Die anderen Verfahren normieren die Schätzungen der Korrelationsfunktion grundsätzlich mit einer Schätzung der Korrelation der Abtastfunktion (die Folge der Abtastzeitpunkte), wodurch spektrale Färbungen der Abtastfunktion kompensiert werden.

Für die drei verbleibenden Verfahren werden wieder die Varianten mit lokaler Normierung und Fuzzy Slotting bzw. dem entsprechenden Äquivalent für die direkte Spektralschätzung getestet (Abb. 5). Auch hier bewirkt die lokale Normierung keine Veränderung der Schätzqualität. Fuzzy hingegen bewirkt eine Zunahme des Fehlers durch die zeitliche Mittelung über die steilen Flanken der Korrelationsfunktion bei kleinen Zeitverschiebungen. Bei der direkten Spektralschätzung ergibt sich zudem eine starke Deformation des geschätzten Leitungsdichtespektrums. Die Konsequenz aus dieser Untersuchung ist, dass die Anwendung von Fuzzy Slotting bzw. des entsprechenden Äquivalents für die direkte Spektralschätzung nicht länger zu empfehlen ist.



Abbildung 3: Ausschnitt eines Beispielsignals und empirische Verteilung der Abtastintervalle mit Mittelwert, Totzeit und Rauschen



Abbildung 4: Leistungsdichtespektrum, gemittelt über 10 000 Realisierungen, a) mit Selbstprodukten, b) ohne Selbstprodukte



Abbildung 5: Leistungsdichtespektrum, gemittelt über 10 000 Realisierungen für a) Slotkorrelation, b) direkte Spektralschätzung, c) Quantisierung der Ankunftszeit

#### 4 LDA-Daten

In der letzten Simulationsrunde werden die bekannten Eigenschaften der Laser-Doppler-Daten gemeinsam simuliert. Neben der ungleichmäßigen Abtastung mit einer unveränderten mittleren Abtastrate von  $1 \, \text{ZE}^{-1}$ , einer simulierten Prozessortotzeit als Resultat des einzuhaltenden Mindestabstandes der nacheinander durch das Messvolumen hindurch tretenden Streuteilchen für den Einzelteilchenbetrieb, dem Mittelwert für einen simulierten Turbulenzgrad von 25% und dem überlagerten Rauschen wird in dieser Simulationsrunde auch der Transport der Teilchen im Strömungsfaden durch das Messvolumen und die dadurch hervorgerufene Bevorzugung von Messwerten mit größerem Geschwindigkeitsbetrag durch das Messverfahren (statistischer Bias) simuliert. Entsprechend wird für alle untersuchten Verfahren der Signalverarbeitung die Gewichtung der Messwerte durch die individuelle Durchflug- oder Aufenthaltszeit des Streuteilchens im Messvolumen genutzt. Unverändert wird für jeden Datensatz der Mittelwert (auch gewichtet) berechnet und vor der Weiterverarbeitung von den Werten des Datensatzes abgezogen und die daraus bestimmten Korrelationsfunktionen und Spektren entsprechend korrigiert (Bessel-Korrektur). Abb. 6 zeigt einen Ausschnitt eines solchen Signals sowie die empirische Wahrscheinlichkeitsdichte der Abtastintervalle. Gegenüber der vorherigen Simulation wird das häufigere Auftreten großer Werte im Messwertensemble deutlich.

Die Verwendung von Selbstprodukten wird nicht noch einmal untersucht, weil das Rauschen auch hier zu einem systematischen Fehler führt, der durch den Ausschluss von Selbstprodukten aus der Mittelung kompensiert wird. Auch Fuzzy Slotting oder das entsprechende Äquivalent für die direkte Spektralschätzung werden nicht weiter untersucht, weil bereits unter weniger problematischen Umständen zuvor signifikante Fehler der Spektralschätzungen auftraten. Die Interpolation der Zeitreihe mit Entfaltung zur Korrektur dynamischer Fehler bei der Rekonstruktion weist aufgrund der verwendeten Voraussetzung einer unabhängigen, rein zufälligen Abtastung beim Auftreten von Prozessortotzeiten unkorrigierte systematische Fehler auf. Außerdem gibt es bei der Interpolation bisher keine Möglichkeit einer geeigneten Gewichtung der individuellen Messwerte. Die implizit durch die Interpolation des Signalverlaufs vorhandene Ankunftszeitgewichtung ist nur bei sehr hohen Datenraten von mindestens 10 Abtastungen pro integralem Zeitmaß ausreichend effektiv, dann mit vergleichbaren Ergebnissen wie mit der Aufenthaltszeitgewichtung. Auch die Interpolation hat bereits in den simpleren Simulation zuvor deutliche Fehler der Korrelations- und Spektralschätzung aufgewiesen, und wird deshalb im folgenden Vergleich nicht berücksichtigt.

Die anderen untersuchten Verfahren zur Bestimmung von Korrelationsfunktionen und Spektren in Abb. 7a zeigen in ihrer jeweiligen Grundversion (keine Selbstprodukte, Aufenthaltszeitgewichtung, kein Fuzzy, keine lokale Normierung) zunächst einmal keine auffälligen Unterschiede zu der zuvor durchgeführten Simulation (ohne statistischen Bias, aber ebenfalls mit Rauschen, Mittelwert und Totzeit). Daraus ist ersichtlich, dass die durchgeführte Gewichtung mit den individuellen Aufenthaltszeiten der Streuteilchen im Messvolumen effektiv wirkt. Vergangene Untersuchungen haben auch immer wieder gezeigt, dass die Aufenthaltszeitgewichtung die einzige bekannte Gewichtungsvorschrift ist, die in einem ausreichend breiten Anwendungsspektrum akzeptable Reduktionen des statistischen Bias erzielt.

Ein detaillierter Vergleich der Spektren zwischen Abb. 5 und 7a lässt jedoch erkennen, dass die Spektren mit statistischem Bias trotz der Gewichtung durchgängig noch etwas niedriger abgeschätzt werden. In der logarithmischen Darstellung fällt das besonders bei hohen Frequenzen mit geringer simulierter Leistungsdichte auf. Auch im mittleren Frequenzbereich mit der künstlich simulierten Delle im Leistungsdichtespektrum wird die Abweichung deutlich. Daraus lässt sich schließen, dass selbst die Aufenthaltszeitgewichtung den durch die Bevorzugung von Messwerten mit großer Amplitude auftretenden statistischen Bias nicht vollständig korrigiert. Aber auch wenn das Ergebnis der Aufenthaltszeitgewichtung nicht ideal ist, diese Gewichtungsvorschrift hat in zurückliegenden Untersuchungen [10] gezeigt, dass sie hinreichend universell anwendbar ist und dabei zufriedenstellende Korrekturergebnisse erbringt.

Der Verglich der Verfahren untereinander ergibt die gleichen Ergebnisse wie in der Simulation zuvor. Für Abtastintervalle nahe null erfolgt die zeitliche Mittelung der Slotkorrelation und der Zeitquantisierung in einem Bereich der Korrelationsfunktion mit starken Gradienten. Die Prozessortotzeit bewirkt dann, dass innerhalb dieses Zeitschritts vorrangig Produkte von Messwerten mit mindestens dieser Prozessortotzeit gemittelt werden, was zu einer Unterschätzung der Korrelationsfunktion bei der Zeitverschiebung null führt. Bei der Anwendung der Gewichtung kommt an genau dieser Stelle noch hinzu, dass bei der Produktbildung der Messwerte, beide Messwerte einzeln gewichtet werden, das Produkt der Messwerte demnach mit dem Produkt der einzelnen Gewichte gewichtet wird. Dieses Vorgehen ist allerdings nur für unabhängige Messwerte korrekt. Bei den hier betrachteten kurzen Abtastintervallen ist aber mit starken Korrelationen zwischen den beteiligten Messwerten zu rechnen, sodass die Gewichtung des Produktes mit dem Produkt der einzelnen Gewichte zu einer Überkompensation des statistischen Bias führt.

Im Gegensatz zu den Simulationen zuvor, hat in dieser komplexen Simulation der LDA-Daten die Anwendung der lokalen Normierung (eingeführt mit der Slotkorrelation [19, 20, 29, 30, 31, 32] und später übertragen auf die direkte Spektralschätzung [23] und die Zeitquantisierung [8]) eine signifikante Veränderung des geschätzten Spektrums zur Folge (Abb. 7b). Dabei wird die Unterschätzung des Spektrums durch die lokale Normierung deutlich reduziert. Insbesondere die direkte Spektralschätzung, die keine Mittelung der Produkte von Messwerten über den Bereich starker Gradienten der Korrelationsfunktion nahe der Zeitverschiebung null durchführt, ergibt sehr gute Schätzungen der Leistungsdichte mit nur noch sehr geringen Restfehlern.



Abbildung 6: Ausschnitt eines Beispielsignals und empirische Verteilung der Abtastintervalle für simulierte LDA-Daten



Abbildung 7: Leistungsdichtespektrum, gemittelt über 10 000 Realisierungen, a) ohne lokale Normierung, b) mit lokaler Normierung

#### 5 Schlussfolgerungen

Aus den Untersuchungen zu den Korrelations- und Spektralschätzern aus ungleichmäßig abgetasteten Daten kann eine klare Empfehlung des zu bevorzugenden Verfahrens abgeleitet werden. Die direkte Spektralschätzung mit Aufenthaltszeitgewichtung, ohne Selbstprodukte, mit lokaler Normierung und Bessel-Korrektur nach Abzug des empirischen Mittelwertes ergibt die geringsten Restfehler unter den untersuchten Verfahren.

Dahinter, mit gewissen Abstrichen, ordnen sich die Slotkorrelation und danach die Zeitquantisierung, jeweils mit Aufenthaltszeitgewichtung, ohne Selbstprodukte, mit lokaler Normierung und Bessel-Korrektur nach Abzug des empirischen Mittelwertes ein. Beide Verfahren mitteln an unterschiedlichen Stellen der Signalverarbeitungskette zeitlich über einen Zeitschritt. Dadurch kommt es zu einer gewissen Unsicherheit der zeitlichen Zuordnung der Produkte von Messwertpaaren. Darüber hinaus kommt bei starken Gradienten der Korrelationsfunktion bei kleinen Zeitverschiebungen im Zusammenhang mit einer Prozessortotzeit zu einer Unterschätzung der Korrelation für die Zeitverschiebung null und in der Folge zu einer zu einer gewissen Unterschätzung des gesamten Spektrums.

Die Aufenthaltszeitgewichtung kompensiert den statistischen Bias durch die Bevorzugung von Messwerten mit großen Geschwindigkeitsbeträgen unter vielfältigen Randbedingungen sehr effektiv. Kleine Restfehler entstehen durch eine gewisse Übergewichtung von korrelierten Messwertpaaren mit kleinen zeitlichen Abständen. Durch die Anwendung der lokalen Normierung kann dieser Restfehler noch einmal verringert werden.

Im Gegensatz zur Spektralschätzung von äquidistant abgetasteten Daten, bewirkt ein von null verschiedener Mittelwert der Daten eine Zunahme der Schätzvarianz des empirischen Spektrums. Deshalb ist eine ebenfalls mit der Aufenthaltszeit gewichtete Bestimmung des empirischen Mittelwertes und dessen Subtraktion von den Messwerten zu empfehlen. Die in der Folge zu gering bestimmte Korrelationsfunktion kann mit einer passenden Bessel-Korrektur verbessert werden.

Die Interpolation des Signals mit anschließender Entfaltung zur Korrektur des dynamischen Fehlers ist auf einige wesentliche Eigenschaften des Datensatzes nicht ausreichend angepasst. Es gibt keine individuelle Gewichtung der Messwerte, Abweichungen der Abtastfunktion von der rein zufälligen Abtastung können nicht berücksichtigt werden, und Messwertrauschen erfordert eine separate Bestimmung der Rauschleistung und deren Korrektur.

Fuzzy Slotting oder das entsprechende Pendant für die direkte Spektralschätzung bewirken eine zusätzliche Verschmierung des Spektrums, ähnlich wie die zeitliche Unsicherheit der Zuordnung der Produkte von Messwerten bei der Slotkorrelation und der Zeitquantisierung. Auch wenn dieses Resultat nicht direkt den spektralen Charakter einer Tiefpassfilterung hat, wirkt sich Fuzzy Slotting damit negativ auf die Korrelations- und Spektralschätzung aus und sollte deshalb nicht weiter zum Einsatz kommen.

## Literatur

- [1] URL http://www.nambis.de/publications/gala21.html.
- [2] R J Adrian and C S Yao. Power spectra of fluid velocities measured by laser Doppler velocimetry. *Exp. in Fluids*, 5:17–28, 1987.
- [3] L Boyer and G Searby. Random sampling: distortion and reconstruction of velocity spectra from fast Fourier-transform analysis of the analog signal of a laser Doppler processor. J Appl Phys, 60(8):2699–2707, 1986.
- [4] P Buchhave, W K George, Jr, and J L Lumley. The measurement of turbulence with the laser Doppler anemometer. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 11:443–503, 1979.
- [5] P Buchhave and C M Velte. Reduction of noise and bias in randomly sampled power spectra. *Exp. in Fluids*, 56:79, 2015.
- [6] P Buchhave, C M Velte, and W K George. The effect of dead time on randomly sampled power spectral estimates. *Exp. in Fluids*, 55:1680, 2014.
- [7] P Buchhave, C M Velte, and W K George. The effect of finite measurement volume on power spectra from a burst type LDA. In Proc. 17th Int. Symp. on Appl. of Laser Techn. to Fluid Mechanics, Lisbon, Portugal, 2014. paper 3.2.1.
- [8] N Damaschke, V Kühn, and H Nobach. A direct spectral estimation method for laser Doppler data using quantization of arrival times. In Proc. 19th Int. Symp. on the Appl. of Laser and Imaging Techn. to Fluid Mechanics, Lisbon, Portugal, 2018. paper 3.8.2.
- [9] N Damaschke, V K
  ühn, and H Nobach. A fair review of non-parametric bias-free autocorrelation and spectral methods for randomly sampled data in laser Doppler velocimetry. *Digital Signal Processing*, 76:22–33, 2018.
- [10] R V Edwards. Report of the special panel on statistical particle bias problems in laser anemometry. Transactions of the ASME, Journal of Fluids Engineering, 109:89–93, 1987.
- [11] M Gaster and J B Roberts. Spectral analysis of randomly sampled signals. J. Inst. Maths. Applics., 15:195–216, 1975.
- [12] M Gaster and J B Roberts. The spectral analysis of randomly sampled records by a direct transform. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 354:27–58, 1977.
- [13] W K George. Quantitative measurement with the burst-mode laser Doppler anemometer. *Exp. Therm. and Fluid Sci.*, 1:29–40, 1988.

- [14] W K George, P D Beuther, and J L Lumley. Processing of random signals. pages 757–800, 1978. Proceedings of the dynamic flow conference, Skovlunde, Denmark, (PO Box 121, DK-2740 Skovlunde).
- [15] W Hösel and W Rodi. New biasing elimination method for laser-Doppler-velocimeter counter processing. *Rev. Sci. Instrum.*, 48:910–919, 1977.
- [16] A Khintchine. Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse. *Mathematische Annalen*, 109:604–615, 1934.
- [17] W T Mayo, Jr. Spectrum measurements with laser velocimeters. In B W Hansen, editor, Proc. Dynamic Flow Conf. on Dynamic Measurements in Unsteady Flows, pages 851–868, Dordrecht, 1978. Springr.
- [18] W T Mayo, Jr, M T Shay, and S Riter. Digital estimation of turbulence power spectra from burst counter LDV data. pages 16–26, 1974. Proceedings of the second international workshop on laser velocimetry, (Bull. No. 144), Purdue Univ., West Lafayette, Ind.
- [19] H Nobach. Processing of stochastic sampled data in laser Doppler anemometry. In Proc. 3rd International Workshop on Sampling Theory and Applications, Loen, Norway, pages 149–154, 1999.
- [20] H Nobach. A global concept of autocorrelation and power spectral density estimation from LDA data sets. In Proc. 10th Int. Symp. on Appl. of Laser Techn. to Fluid Mechanics, Lisbon, Portugal, 2000. paper 3.5.
- [21] H Nobach. Local time estimation for the slotted correlation function of randomly sampled LDA data. Exp. in Fluids, 32:337–345, 2002.
- [22] H Nobach. Corrections to the direct spectral estimation for laser Doppler data. *Exp. in Fluids*, 56:109, 2015.
- [23] H Nobach. Fuzzy time quantization and local normalization for the direct spectral estimation from laser Doppler velocimetry data. *Exp. in Fluids*, 56:182, 2015.
- [24] H Nobach, N Damaschke, and V Kühn. Ein fairer Vergleich von Methoden zur Autokorrelationund Leistungsdichteschätzung aus Laser-Doppler-Daten. In Proc. 26. Fachtagung Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik, Rostock, 2018. Beitrag 3.
- [25] H Nobach, E Müller, and C Tropea. Correlation estimator for two-channel, non-coincidence laser-Doppler-anemometer. In Proc. 9th Int. Symp. on Appl. of Laser Techn. to Fluid Mechanics, Lisbon, Portugal, 1998. paper 32.1.
- [26] H Nobach, E Müller, and C Tropea. Efficient estimation of power spectral density from laser Doppler anemometer data. *Experiments in Fluids*, 24:499–509, 1998.
- [27] J B Roberts and D B S Ajmani. Spectral analysis of randomly sampled signals using a correlation-based slotting technique. *IEE Proc.*, 133(2):153–162, 1986.
- [28] L Simon and J Fitzpatrick. An improved sample-and-hold reconstruction procedure for estimation of power spectra from LDA data. *Exp. in Fluids*, 37:272–280, 2004.
- [29] M J Tummers and D M Passchier. Spectral estimation using a variable window and the slotting technique with local normalization. *Meas. Sci. Technol.*, 7:1541–1546, 1996.
- [30] M J Tummers, D M Passchier, and P A Aswatha Narayana. LDA measurements of time- and spatial correlation functions in an adverse pressure gradient wake. In *Proc. ASME/JSME Fluids Eng. and Laser Anemometry Conf.*, pages 347–355, Hilton Head Island, South Carolina, USA, 1995. FED-Vol. 229.
- [31] H R E van Maanen, H Nobach, and L H Benedict. Improved estimator for the slotted autocorrelation function of randomly sampled LDA data. *Meas. Sci. Technol.*, 10(1):L4–L7, 1999.
- [32] H R E van Maanen and M J Tummers. Estimation of the autocorrelation function of turbulent velocity fluctuations using the slotting technique with local normalization. In Proc. 8th Int. Symp. on Appl. of Laser Techn. to Fluid Mechanics, Lisbon, Portugal, 1996. paper 36.4.
- [33] C M Velte, P Buchhave, and W K George. Dead time effects in laser Doppler anemometry

measurements. Exp. in Fluids, 55:1836, 2014.

- [34] C M Velte, P Buchhave, and W K George. Power spectrum estimation of randomly sampled signals. In Proc. 17th Int. Symp. on Appl. of Laser Techn. to Fluid Mechanics, Lisbon, Portugal, 2014. paper 3.2.3.
- [35] C M Velte, W K George, and P Buchhave. Estimation of burst-mode LDA power spectra. *Exp. in Fluids*, 55:1674, 2014.