

Untersuchungen zum Einfluss von Blasensäulen auf die Ultraschall Doppler Messtechnik

Investigations of the influence of bubble columns on the Ultrasound Doppler Velocimetry measurement technology

D. Klembt, H. Meironke, E. Pommer

Hochschule Stralsund, Zur Schwedenschanze 15, 18435 Stralsund

Ultraschall Doppler Messtechnik, Particle Image Velocimetry, CFD, Zweiphasenströmung
Ultrasound Doppler Velocimetry, Particle Image Velocimetry, CFD, Two-phase flow

Zusammenfassung

Zur Untersuchung des Einflusses von Blasensäulen auf die Ultraschall Doppler Messtechnik (UDV) werden die wesentlichen, theoretischen Grundlagen aufbereitet und zusammenfassend dargestellt. Weiterhin wird an einem Versuchsstand, der speziell für die strömungsmechanische Untersuchung konstruiert wurde, eine umfangreiche experimentelle Untersuchung vorgenommen. Vorgestellt werden experimentelle Versuche mit dem UDV und der Particle Image Velocimetry (PIV) sowie der numerischen Simulation mit CFD. Resultierend werden aus den Ergebnissen, Aussagen zum Umgang mit aufsteigenden Blasensäulen getroffen und eine Reduzierung bzw. Vermeidung von Geschwindigkeitsmessfehlern erläutert.

Einleitung

Im Rahmen der Untersuchung von Mehrphasenströmungen werden die Prozesse der Gärung, Reifung und Lagerung erforscht. Für die Untersuchung verfügt die Hochschule über einen eigenen 350 Liter Gärtank mit umfangreicher Strömungs- und Temperaturmesstechnik und ist damit in der Lage systematisch den Einfluss der Hefe auf die Gärungsaktivität, die Hefeverteilung und die auftretenden Konvektionsphänomene zu untersuchen. Die Herausforderung bei der Untersuchung von biologisch aktiven, fermentierenden Flüssigkeiten (z.B. Hefe und Bierwürze) sind die vielen komplexen Wechselwirkungen zwischen den verschiedenen Phasen (Würze als Flüssigkeit, Hefe als Feststoff, Kohlenstoffdioxidblasen (CO₂) als Gas). In der Folge muss für die Untersuchung der Geschwindigkeitsfelder eine hohe Anforderung an die Messtechnik und die anschließende Auswertung gestellt werden. Aufgrund der hohen Trübung sind optische Methoden zur Messung der Geschwindigkeitsfelder ausgeschlossen. Für die messtechnische Erfassung von Geschwindigkeitsprofilen und -feldern in biologisch sensiblen Medien hat sich in vergangenen Untersuchungen [1, 2] das berührungslose Ultraschall Doppler Verfahren (UDV) bewährt. Schwierigkeiten bei der Messung mit der UDV-Messtechnik entstehen, wenn Gasblasen im Medium vorhanden sind. Für eine gezielte wissenschaftliche Erforschung der Mehrphasenströmung müssen groß- und feinskalige Strömungsphänomene mithilfe der Ultraschall Doppler Messtechnik aufgelöst werden. In dem dafür benötigten Geschwindigkeitsmessfeld steigt mit zunehmender Diskretisierung allerdings die Wahrscheinlichkeit von Geschwindigkeitsmessfehlern, durch Gasblasen bzw. unterschiedliche Phasengeschwindigkeiten.

Theoretische Betrachtungen zur Interaktion zweier Phasen (gasförmig/flüssig)

Nachfolgend werden die wichtigsten Charakteristika einer Blasensäule/Zweiphasenströmung (Gas/Flüssigkeit) behandelt. Eingegrenzt wird die Untersuchung auf einen in der Gärung üblicher Weise entstehenden Gasvolumenstrom an CO_2 im Versuchstank. Die entstehenden Gas-

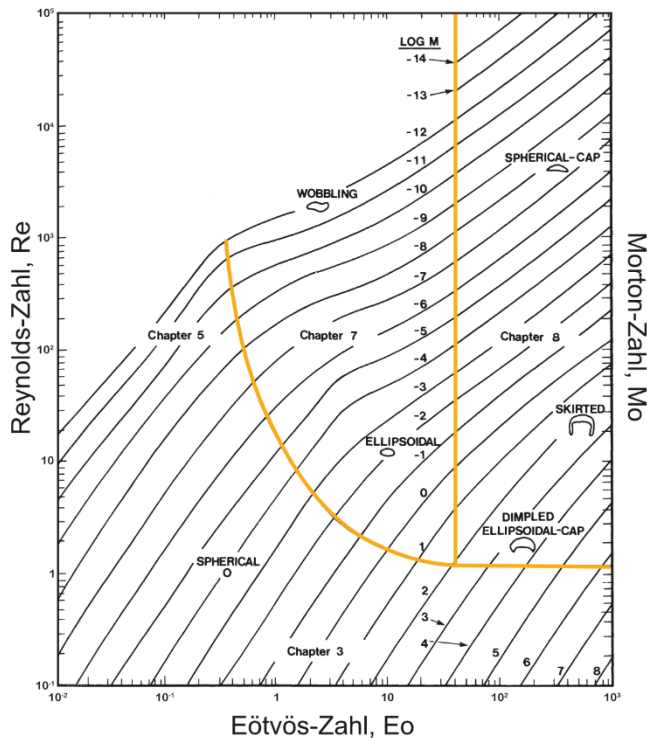


Abb. 1: Form von Gasblasen in einer Flüssigkeit [8]

Die geometrische Form einer Gasblase, kann in Abhängigkeit des Blasendurchmessers in fünf Grundformen eingeteilt werden [3, 4]. Die jeweilige Form der einzelnen Gasblase stellt sich abhängig vom Durchmesser und den Spannungsverhältnissen ein und wird zusätzlich beeinflusst durch das Nachlaufgebiet der vorhergehenden Gasblase. Eine Charakterisierung der Blasenform kann mithilfe von dimensionslosen Ähnlichkeitskennzahlen und der Abb. 1 erfolgen. Nach Grassmann [3] ähneln sehr kleine Blasendurchmesser dem Verhalten eines Festkörpers (Oberflächenspannung dominant, Viskosität vernachlässigbar). Bei größeren Blasendurchmessern treten Formen mit bewegter Grenzschicht auf, bei denen in der Blase eine Zirkulationsströmung entsteht. Mit weiter ansteigender Größe nimmt auch der Druck auf die Grenzfläche zu und beginnt die aufsteigende Blase zu verformen. Die Blasenform ähnelt in diesem Regime einem abgeflachten Rotationsellipsoid. Weiterhin werden die Form und Blasenbahn in der Blasensäule durch komplexe Interaktionsvorgänge zwischen den einzelnen Gasblasen hervorgerufen.

Die Aufstiegsgeschwindigkeit wird hauptsächlich von der Größe der Blase und den Stoffeigenschaften der Flüssigkeit beeinflusst und ist im Allgemeinen nach einer bestimmten Zeit stationär. Die Abb. 2 stellt PIV-Messungen zur Aufstiegsgeschwindigkeit bei verschiedenen Ablösefrequenzen bzw. variierendem Volumenstrom in einem 60%igem Glycerin/Wasser-Gemisch (Dichte ähnelt der von Jungbier) dar sowie die jeweilige Blasenform in der Blasensäule. Die Messergebnisse entsprechen dabei den Untersuchungen von Braeske, Dornick und Brenn [5]. Zu erkennen ist, dass die maximale Aufstiegsgeschwindigkeit mit der Ablösefrequenz zunimmt. Untersucht wurden allerdings nur periodisch stationär und störungsfreie Blasensäulen ohne Neigung zur dreidimensionalen Ausbreitung. Durch die höhere Viskosität und die etwas geringere Oberflächenspannung von Glycerin werden die Blasensäulen bis zu einer Ablösefrequenz von 14 Hz nicht in einer zickzackförmigen oder helikalen Bahn aufsteigen.

blasen haben dabei eine variable Größe von $50 \mu\text{m} \leq d_B \leq 3,5 \text{ mm}$. Der Volumenstrom an CO_2 entspricht im Versuchsaufbau einer Ablösefrequenz von $f \leq 2,4 \text{ Hz}$.

Für die Berechnung der Interaktion zweier Phasen sollten die nachfolgenden, grundlegenden Randbedingungen bekannt sein. Dazu zählen insbesondere die Dichte, Viskosität und Oberflächenspannung. Diese Fluideigenschaften sind abhängig von der Temperatur sowie dem Druck und beeinflussen sowohl die Aufstiegsgeschwindigkeit als auch die Form und Bahn der Gasblasen. Zusätzlich sollte auch auf vorhandene Inhaltsstoffe im Fluid (Partikel) geachtet werden, denn diese wirken sich zum Teil stabilisierend auf die Gasphase aus.

Die geometrische Form einer Gasblase,

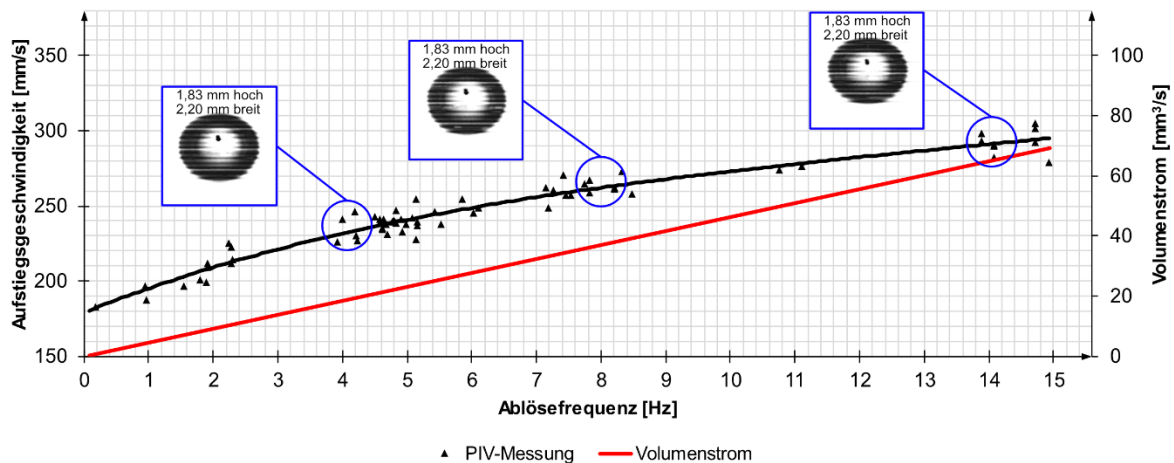


Abb. 2: Aufstiegsgeschwindigkeit und Blasenform bei verschiedenen Ablösefrequenzen bzw. variierendem Volumenstrom in einem 60%igem Glycerin/Wasser-Gemisch mittels PIV

Grundlagen der UDV-Messtechnik

Die Ultraschall Doppler Messtechnik ist ein akustisches Strömungsmesssystem, welches nicht-invasiv Strömungsfelder erfassen kann. Mithilfe dieses Messverfahrens besteht die Möglichkeit instationäre Geschwindigkeitsprofile in einer Strömung entlang der Strahlachse zu messen. Ermöglicht wird dies durch die Messung und anschließende Auswertung der Dopplerfrequenzen als Funktion der Zeit. Sofort nach dem Aussenden eines Ultraschall-Pulses (mit definierter Basisfrequenz), schaltet der Transducer auf Empfang und wartet auf das reflektierte, frequenzverschobene Antwortsignal, welches die Sonde nach einer definierten Zeit erreicht (siehe Gl.(1)). Bei der Auswertung des Antwortsignales wird dann die Laufzeit des Pulses und die ortsaufgelöste Dopplerfrequenz berücksichtigt.

$$t = \frac{2 \cdot x}{a} \text{ [s]} \quad (1) \quad v_p = \frac{a \cdot (f_T - f_0)}{2 \cdot f_0} \text{ [m/s]} \quad (2)$$

Geschwindigkeitsinformationen von Partikeln, die weiter entfernt auf der Strahlachse liegen, werden entsprechend später vom Transducer aufgenommen und folglich einem entfernteren Messvolumen auf der Strahlachse zugeordnet. Aus den jeweiligen Dopplerfrequenzen und der Differenz zwischen Sende- und Empfangsfrequenz des Ultraschallsignals kann dann die mittlere Strömungsgeschwindigkeit errechnet werden (siehe Gl. (2)). Bei der Auswertung wird dann jedem Messvolumen eine gewichtete, mittlere Geschwindigkeit zugeordnet. Der Bereich direkt nach dem Transducer wird als Fresnel-Zone bezeichnet, in dem keine Messungen möglich sind. In der anschließenden Fraunhofer-Zone weitet sich das Messfeld mit einem definierten Winkel auf. Für die Messungen der vorliegenden Arbeit wurden Transducer mit einer Basisfrequenz von 2 MHz verwendet. Diese besitzen durch ihre Abstrahlcharakteristik eine Fresnel-Zone von 27,1 mm, einen Austrittsdurchmesser des Ultraschalls (aktiver Durchmesser) von 10 mm und einer sich ergebenden halben Strahldivergenz von 2,7° entlang der Strahlachse. Bei einer konstanten Schallgeschwindigkeit und Basisfrequenz der Transducer ist auch das Produkt aus der maximalen Eindringtiefe und der maximal messbaren Geschwindigkeit konstant (siehe Tab. 1).

Tab. 1: Eindringtiefe zum messbaren Geschwindigkeitsbereich

	Eindringtiefe	Messbarer Geschwindigkeitsbereich	Mgl. Geschwindigkeitsauflösung
Blasenturm	700 mm	-304 bis +304 mm/s	2,37 mm/s
Versuchstank	1150 mm	-185 bis +185 mm/s	1,14 mm/s

Versuchsaufbau

Für die qualitative Beschreibung des Einflusses von Blasensäulen auf die UDV-Messtechnik wurde ein entsprechend modularer Versuchstand entwickelt (siehe Abb. 3). Kernstück des Versuchstandes ist ein 1 m hoher gläserner Behälter (zu 70% mit einem 60%igem Glycerin/Wasser-Gemisch gefüllt) mit quadratischer Grundform (ca. 200 x 200 mm). Im Boden dieser Blasensäule ist mittig eine Öffnung eingebracht, in dem eine Stahl-Kapillare (Öffnungsdurchmesser $d_K = 0,86 \text{ mm}$) installiert wurde. Die Generierung der Gasblasen und die Einstellung der Ablösefrequenz erfolgt mit Druckluft und mehreren Nadelventilen. Das für den Vergleich des UDV-Messergebnis notwendige Strömungsfeld um die Blasensäule erfolgt mittels einer zweidimensionalen PIV-Messung. Damit eine exakte Positionsbestimmung der Geschwindigkeitsaufnahmen und der späteren Auswertung stattfinden kann, ist zusätzlich ein Justierlaser an einer Linearverfahreinrichtung montiert. Für eine detaillierte Auflösung der Geschwindigkeitsfelder mit dem PIV, unter anderem an der Phasengrenze der Gasblase, werden fluoreszierende Partikel ($\rho = 1,05 \text{ g/cm}^3$, $d_p = 1 \text{ }\mu\text{m}$) verwendet. Die Aufnahme der Strömungspartikel erfolgt anschließend mit einer Kreuzkorrelations-CCD-Kamera (Aufnahmefeld ca. 31 x 31 mm), bei einer Auflösung von 2048 x 2048 Pixeln. Durch einen speziellen Interferenzfilter wird nur das Streulicht der Partikel von der Kamera erfasst. Die UDV-Geschwindigkeitsmesstechnik befindet sich im oberen Teil der Blasensäule und wird realisiert durch einen 2 MHz Transducer im Lot zu der Kapillare. Gestartet wird die UDV-Messung zeitlich synchronisiert mit dem PIV-System durch ein TTL-Signal, welches durch eine zweifache Lichtschranke ausgelöst wird. Zusätzlich kann mithilfe der Lichtschranken die Aufstiegsgeschwindigkeit einzelner Gasblasen, die Ablösefrequenz und der Abstand zwischen den Gasblasen gemessen werden. Die Lichtschranken stellen sicher, dass das PIV-Messsystem denselben zeitlichen Gasblasenabschnitt wie das UDV detektiert. Für die Einordnung der Gasblasenform und eventuell zeitlicher Änderungen steht eine Hochgeschwindigkeitskamera zur Verfügung die 4500 Bilder pro Sekunde aufnehmen kann. Die für die UDV-Geschwindigkeitsauswertung benötigte Schallgeschwindigkeit wird periodisch mithilfe eines Laufzeitenverfahren im Blasenturm ermittelt und beträgt im Mittel ca. 1846 m/s (22,5 °C, 1 bar).

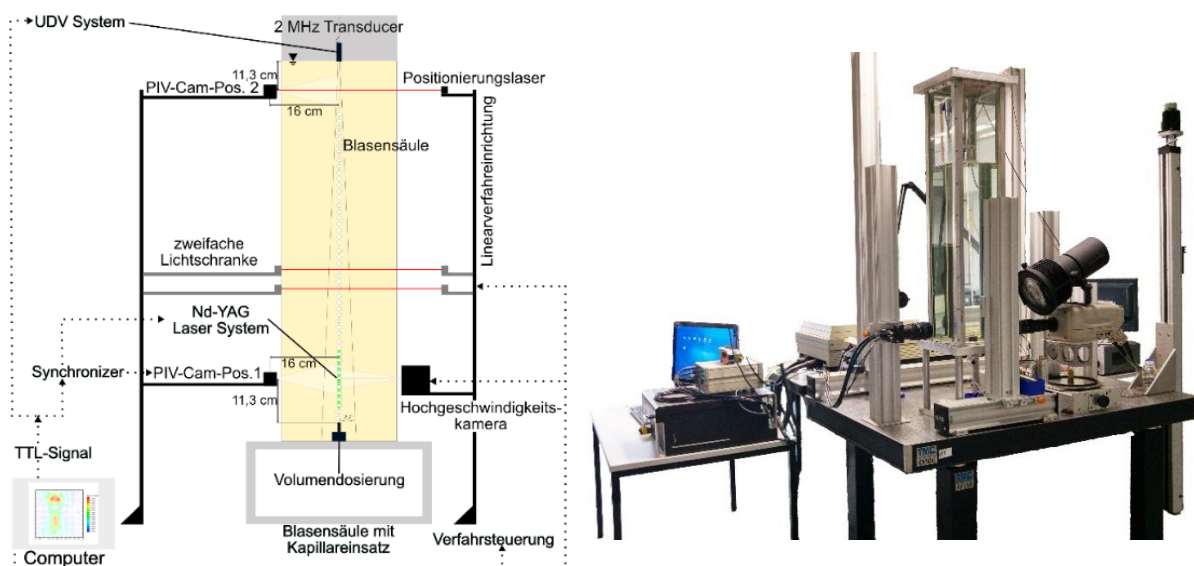


Abb. 3: Schematischer und realer Versuchsaufbau mit akustischer und optischer Messtechnik

Die Tab. 2 stellt die Stoffeigenschaften und Tab. 3 die strömungsmechanischen Kennwerte des Gemisches/der Strömung dar.

Tab. 2: Stoffeigenschaften des 60%igem Glycerin/Wasser-Gemisches und des Gases

Kennwerte:	60% Glycerin/Wasser (C ₃ H ₈ O ₃ /H ₂ O)	Luft (78% N ₂ , 21% O ₂)
Dichte [kg/m ³]	$\rho=1154$	$\rho=1,188$
Dynamische Viskosität [kg/(m·s)]	$\eta=12,4 \cdot 10^{-3}$	$\eta=18,2 \cdot 10^{-6}$
Oberflächenspannung [N/m]	$\sigma=65,8 \cdot 10^{-3}$	

Ergebnisse und Diskussion

Geschwindigkeitsfeld mittels PIV und UDV

Aus vorherigen Experimenten zum Blasenauftiegsverhalten ist bekannt, dass nach einer kurzen instationären Beschleunigungsphase die Blase stationär aufsteigt [2]. Aus diesem Grund finden alle Messungen im Bereich des stationären Aufstiegs statt. Das für die Untersuchung verwendete 60%ige Glycerin/Wasser-Gemisch wirkt sich auf die Blasenoberflächen dämpfend aus und die Blasenformen bleiben, wie in Abb. 2 dargestellt, annähernd rotationssymmetrisch. Die Ergebnisse der PIV-Aufnahmen im Vergleich zu der Geschwindigkeitsmessung des UDV-Systems sind exemplarisch in Abb. 4 (Aufnahme 10 cm unterhalb des Transducer) dargestellt.

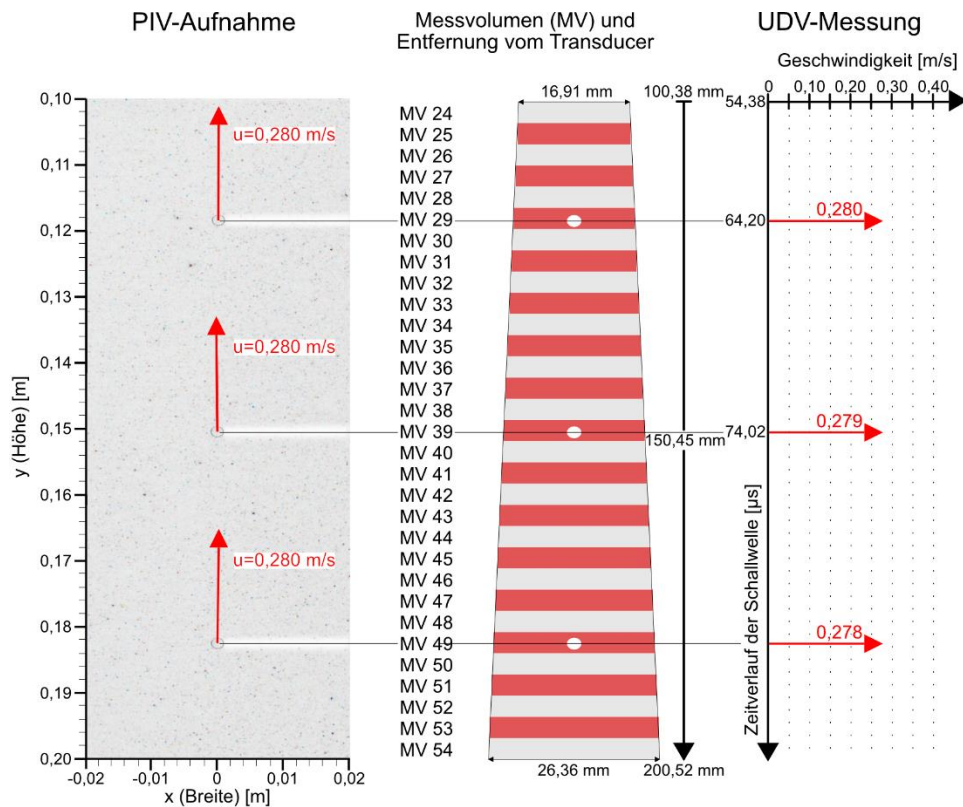


Abb. 4: Vergleich der PIV-Messung (60%iges Glycerin/Wasser-Gemisch, 8,2 Hz, Cam-Pos.2 (oben)) mit den betroffenen Messvolumen und der Geschwindigkeitsmessung des UDV-Systems

Geschwindigkeitsfeld mittels numerischer Simulation

Zusätzlich zu der experimentellen Messung der Geschwindigkeitsfelder sollen diese ebenfalls numerisch abgebildet werden. Die Simulation einer Blasen säule setzt dabei die Auswahl der entsprechenden mathematischen Modelle für den vorliegenden Anwendungsfall voraus. Verwendet wurde das Euler-Euler-Modell, welches die Modellierung mehrerer getrennter, aber interagierender Phasen ermöglicht. Für jede Phase wird eine Eulersche Behandlung verwendet, im Gegensatz zur Euler-Lagrange Behandlung, die für das diskrete Phasenmodell verwendet wird. Nachteil der Euler-Euler-Betrachtung ist, dass nur ein resultierendes Geschwindigkeitsfeld pro Phase dargestellt werden kann, was die Untersuchung von Geschwindigkeiten

Tab. 3: Dimensionslose Kennzahlen

Kennzahl:	
Reynolds-Zahl	Re= 55,80
Morton-Zahl	Mo= 7,03E-07
Eötvös-Zahl	Eo= 1,44
Weber-Zahl	We= 2,18
Froude-Zahl	Fr= 1,23
Fluidkennzahl	k _F = 1,16E06

zwischen einzelnen Gasblasen ausschließt. In der Momentengleichung des Euler-Euler-Modells [6] wird deutlich, dass mehrere Interphasen-Widerstandsbeiwertfunktionen und zusätzliche Kraftmodelle zur Verfügung stehen (Widerstandsterm, Auftriebskraft, Wandschmierung, virtuelle Massenkraft, turbulente Dispersionskraft), die für verschiedene Typen von Mehrphasensysteme geeignet sind. Die Modellauswahl erfolgte mithilfe dimensionsloser Kennzahlen (siehe Tab. 3). Im Ergebnis müssen die Modelle Gasblasen im Übergang von der sphärischen in die ellipsoide Geometrie abbilden können (siehe Tab. 3 in Kombination mit Abb. 1). Nach Deen [7] sind die relevanten Kräfte bei einer Blasensäule: die Widerstandskraft, die Auftriebskraft und die virtuelle Masse. Für die Nachbildung der Widerstandskräfte wurde das Grace Drag-Modell verwendet und der Koeffizient entsprechend an das Experiment angepasst. Das verwendete Auftriebsmodell ist von Tomiyama. Zur Modellierung der turbulenten Schwankungsbewegungen wurde das k- ω -SST-Turbulenzmodell verwendet. Der Massenstrom der Luft beträgt 2,55E-08 kg/s und entspricht damit einer Ablösefrequenz von 4,6 Hz im Experiment. Im direkten Vergleich von einer PIV-Messung mit dem Ergebnis der numerischen Simulation (siehe Abb. 5) fällt auf, dass die Geschwindigkeitsfelder sehr ähnlich sind. Die Aufstiegs geschwindigkeit der Blasensäule ist identisch mit der numerischen Simulation, allerdings ist die Aufweitung der Blasenbahn bei der Simulation stärker ausgeprägt. Eine zukünftige Weiterentwicklung wird die Veränderung des Koeffizienten aus dem Auftriebsmodell (Tomiyama) und die feinere Vernetzung des strukturierten Netzes sein.

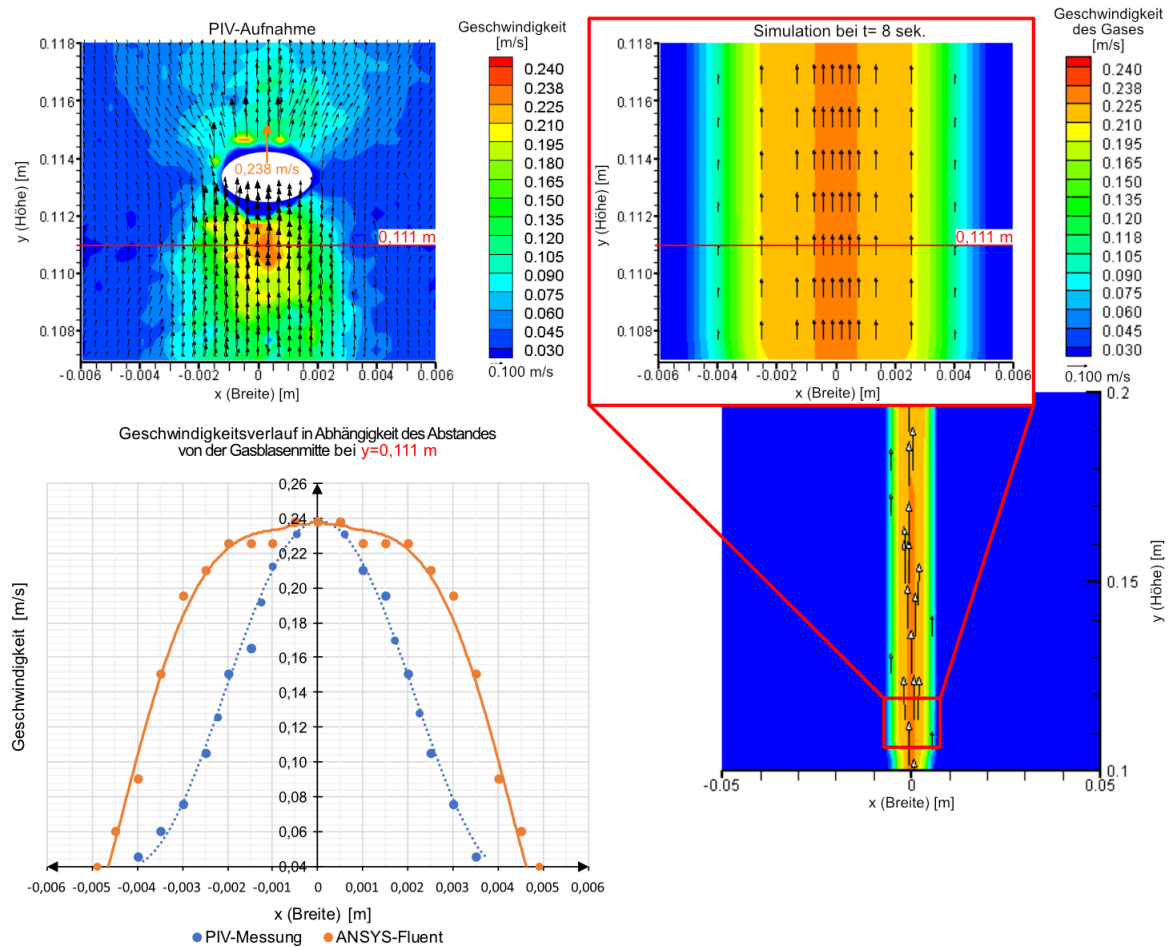


Abb. 5: Geschwindigkeitsprofil einer aufsteigenden Gasblase in einem 60%igem Glycerin/Wasser-Gemisch, links PIV-Aufnahme, rechts numerische Simulation der Blasensäule mit Vergleichsausschnitt und Geschwindigkeitsverlauf

Auswertung des PIV/Simulation/UDV-Vergleichs

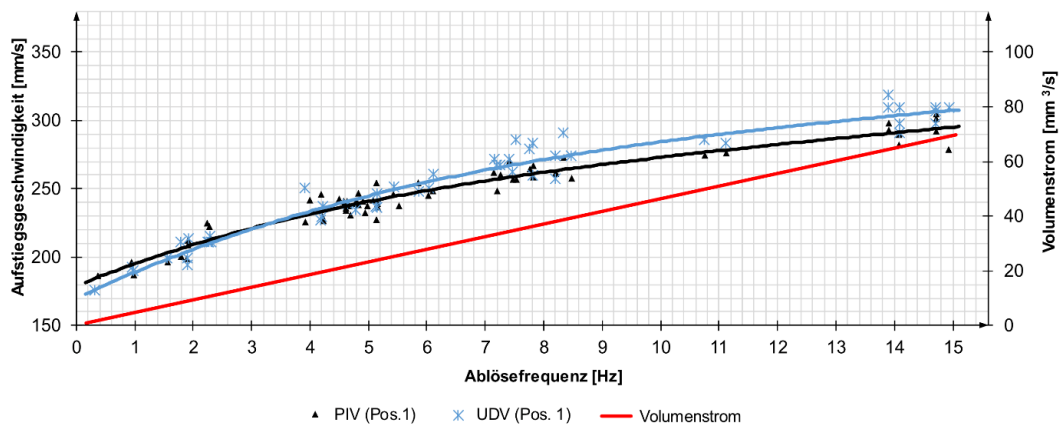


Abb. 6: Vergleich der Aufstiegs- und Volumenstrommessungen in Abhängigkeit der Ablösefrequenz in Position 1 (unten)

Ausgehend von den experimentellen und numerischen Ergebnissen können mehrere Auswirkungen einer Blasensäule auf die UDV-Messtechnik festgehalten werden. Die Abb. 6 und Abb. 7 stellen eine Übersicht der experimentellen und numerischen Messergebnisse dar. Als Folge der Mittelung des UDV-Systems wird deutlich, dass die detektierten Geschwindigkeiten bei geringen Ablösefrequenzen ($f_{Ab} \leq 3,4$ Hz) niedriger ausfallen als die des PIV-Systems und der Simulation [2]. Bei Ablösefrequenzen von $f_{Ab} > 3,4$ Hz fallen diese allerdings höher aus, da die Geschwindigkeiten des UDV-Systems an der Grenze des maximal messbaren Geschwindigkeitsbereiches einen höheren Fehler aufweisen. Der Zusammenhang zwischen der gemessenen Aufstiegs- und Volumenstromgeschwindigkeit und dem jeweiligen Messvolumen ist in Abb. 4 dargestellt. Das Ergebnis ist, dass je weiter die Geschwindigkeit auf der Strahlachse in Entfernung zum Transducer gemessen wird, desto größer ist das systembedingte Messvolumen (Divergenz der Schallwelle) und umso geringer die detektierte Aufstiegs- und Volumenstromgeschwindigkeit der Gasblasen. Aus diesem Grund besitzen Messungen mit dem UDV-System im ersten Viertel der maximal messbaren Tiefe die beste räumliche Auflösung.

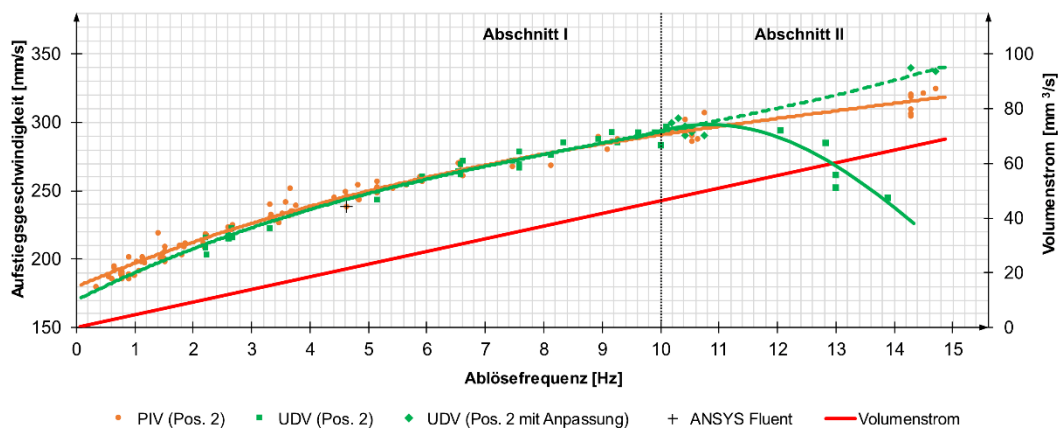


Abb. 7: Vergleich der Aufstiegs- und Volumenstrommessungen in Abhängigkeit der Ablösefrequenz in Position 2 (oben)

Ein weiteres Problem bei der UDV-Messung in einer Zweiphasenströmung ist der auftretende Aliasing-Effekt. Dieser Effekt tritt auf, wenn der maximale Geschwindigkeitsbereich (v_{range}) überschritten wird und führt zu einer verminderten Geschwindigkeitsdetektion. In Abb. 7 tritt dieser Fehler ab einer Ablösefrequenz von $f_{Ab} \geq 10$ Hz bzw. $\dot{V} > 46$ mm³/s, bei der eingestellten Eindringtiefe (P_{max}), Schallgeschwindigkeit (a) und Basisfrequenz (f_0) auf. Nimmt der Volumenstrom anschließend weiter zu, verstärkt sich der Effekt und die detektierte Geschwindigkeit

nimmt weiter ab (siehe Abb. 7, Abschnitt II, UDV (Pos. 2)). Damit die Aufstiegsgeschwindigkeiten wieder ohne Aliasing-Effekt gemessen werden können, müssen die Messparameter angepasst werden (siehe Abb. 7, Abschnitt II, UDV (Pos. 2 mit Anpassung)). Die Anpassung hat allerdings zur Folge, dass die weiteren Messungen mit einer geringeren Auflösung (Δv) stattfinden (Geschwindigkeiten in den Messungen steigen), denn das Produkt des Geschwindigkeitsbereiches (v_{range}) und der Eindringtiefe (P_{max}) ist konstant (siehe Gleichung (3)).

$$P_{\text{max}} \cdot v_{\text{range}} = \frac{a^2}{4f_0} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] \quad (3)$$

$$\Delta v = \frac{v_{\text{range}}}{256} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (4)$$

Folglich muss bei jeder Messung ein Kompromiss zwischen der maximalen Eindringtiefe, dem maximalen Geschwindigkeitsbereich und der maximal möglichen Geschwindigkeitsauflösung (siehe Gleichung (4)) gefunden werden. Ein weiteres Ergebnis der Untersuchung ist, dass bei einzelnen Messvolumen die Geschwindigkeit der Gasblasen bis auf null abnimmt und anschließend wieder ansteigt. Die betroffenen Messvolumen lassen sich entsprechend der verwendeten Messparameter und des Abstandes vom Transducer zum Boden variieren. Eine PIV-Messung des Geschwindigkeitsfeldes um die betroffenen Messvolumen schließt diesen Geschwindigkeitsverlauf allerdings aus. Erklären lässt sich dieser Fehler dadurch, dass die ausgesendeten Schallsignale in bestimmten Messvolumen mit reflektierenden Schallsignalen gleicher Intensität interferieren und sich vollständig auslöschen. Anschließend wird in diesen Messvolumen keine Dopplerverschiebung detektiert und eine Geschwindigkeit von $v=0$ gemessen. Ein Problem, welches weiterhin nur konstruktiv gelöst werden kann, ist die Vermeidung eines dauerhaften Phasenüberganges auf der oszillierenden Membran des Transducer durch sich absetzende Gasblasen. Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass bei sehr geringen Ablösefrequenzen ($f_{\text{Ab}} \leq 10$ Hz) die Gasblasen mithilfe einer Programmlogik erkannt und gefiltert werden können. Die entstehenden Effekte bei höheren Ablösefrequenzen lassen sich lediglich durch eine exakte Bestimmung/Definition der Messparameter/-umgebung (max. Aufstiegsgeschwindigkeit, Eindringtiefe, Schallkegel, etc.) reduzieren bzw. vermeiden.

Danksagung

Die Autoren bedanken sich für die die UDV-Messtechnik (GHS-15-0050, GHS-17-0021) durch den „Europäischen Fonds für Regionale Entwicklung“ (EFRE) und der PIV-Messtechnik (GZ: INST 295/32-1 LAGG) bei der „Deutschen Forschungsgemeinschaft“ (DFG).

Literatur

- [1] H. Meironke, D. Kasch und R. Sieg, Determining the thermal flow structure inside fermenters with different shapes using Ultrasonic Doppler Velocimetry, H. Kikura, H. Murakawa und Y. Tasaka, Hrsg., Japan: Tokyo Institute of Technology, 2016, pp. 125-128.
- [2] H. Meironke, D. Klemmt und T. Panten, Untersuchungen zum Einfluss von Gasblasen auf die Ultraschall Doppler Messtechnik mittels optischer und numerischer Methoden, Karlsruhe: Deutsche Gesellschaft für Laser-Anemometrie, ISBN 978-3-9816764-3-3, 2017, pp. 45/1-45/8.
- [3] P. Grassmann, Physikalische Grundlagen der Chemie-Ingenieur-Technik, Frankfurt am Main: Sauerländer Verlag, 1961.
- [4] M. H. Pahl und M. Özkurt, Aufstiegsverhalten von CO₂-Blasen unter verschiedenen Betriebsbedingungen, Paderborn: Monatsschrift für Brauwissenschaft, 1998.
- [5] H. Braeske, J. Domnick und G. Brenn, Experimentelle Grundlagenuntersuchung zur Strömungsmechanik in Blasensäulen, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Universität Erlangen- Nürnberg, 1996-2003.
- [6] D. Klemmt und H. Meironke, Numerical approaches for the simulation of a real multiphase flow in a fermentation tank, München: GAMM, 2018.
- [7] N. Deen, An Experimental and Computational Study of Fluid Dynamics in Gas-liquid Chemical Reactors, Esbjerg: Aalborg University Esbjerg, 2001.
- [8] R. Clift, J. R. Grace und M. E. Weber, Bubbles, Drops and Particles, Cambridge: Academic Press, 1978.