

LDA-Messung von Längskorrelationen in einer turbulenten Strömung

LDV measurement of longitudinal correlations in a turbulent flow

H. Nobach

Max-Planck-Institut für Dynamik und Selbstorganisation, Am Faßberg 17, 37077 Göttingen

LDA, Zweipunktmessung, Zeit-Raum-Transformation, Taylor-Hypothese, Korrelation, Turbulenz
 LDV, Two-point measurement, Time-space transformation, Taylor's hypothesis, Correlation, Turbulence

Zusammenfassung

Die Transformation einer zeitlichen Korrelationsfunktion der Geschwindigkeit an einem Messpunkt in einer turbulenten Strömung in die longitudinale räumliche Korrelationsfunktion bzw. in Zeit-Raum-Korrelationen auf der Grundlage eines statistischen Transportmodells soll dargestellt und sowohl mit dem als Taylorsche Hypothese einer eingefrorenen Strömung bekannten Modell sowie mit LDA-Zweipunktmessungen verglichen werden.

1 Einführung

Während die direkte Bestimmung der longitudinalen räumlichen Korrelationsfunktion $\rho_l(\xi)$ Zweipunktmessungen mit variablem Abstand ξ der Messpunkte voraussetzt, kann die Eulersche zeitliche Autokorrelationsfunktion $\rho_E(\tau)$ direkt aus einer zeitlich aufgelösten Geschwindigkeitsmessung an einem Punkt bestimmt werden. In Strömungen mit deutlich größeren mittleren Geschwindigkeiten U als deren zeitlichen Schwankungen u' kann mittels der Taylorschen Hypothese (TH) einer eingefrorenen Strömung der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeitsschwankungen $u'(t)$ als Beobachtung eines räumlichen Geschwindigkeitsfeldes $u'(x)$ entlang des Strömungsfadens interpretiert werden. Damit lässt sich auch die Eulersche zeitliche Autokorrelationsfunktion $\rho_E(\tau)$ direkt in die longitudinale räumliche Korrelationsfunktion $\rho_l(\xi)$ überführen, wobei die Korrespondenz zwischen der Zeitverschiebung τ und dem räumlichen Abstand ξ durch

$$\xi = U\tau$$

mit der konstanten, mittleren Geschwindigkeit U hergestellt wird.

In [1] wurde eine integrale Zeit-Raum-Transformation (IZRT) dargestellt, die Schwankungen der Momentangeschwindigkeit einbezieht. Die momentanen Transportgeschwindigkeiten u zwischen zwei angenommenen Messpunkten der Entfernung ξ entlang der Hauptströmungsrichtung werden auf großen Zeitskalen als zufällig mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(u)$ angenommen. Auf kleinen Zeitskalen, nämlich während des Durchflugs des angenommenen Messpunktabstandes ξ wird die Geschwindigkeit dagegen als konstant angenommen. Diese Annahme korrespondiert mit einer angenommenen Lagrangeschen zeitlichen Korrelation, die auf Skalen des Durchflugs durch die Messanordnung einen ausreichend geringen Abfall zeigt.

Die Transformation der Eulerschen zeitlichen Autokorrelationsfunktion $\rho_E(\tau)$ in die longitudinale räumliche Korrelationsfunktion $\rho_l(\xi)$ wird dann zu

$$\rho_l(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_E(-\theta) f_{\theta}(\theta|\xi) d\theta$$

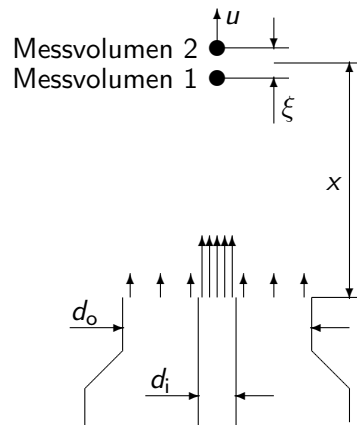


Abbildung 1: Experimenteller Aufbau.

Tabelle 1: Strömungsparameter (Experiment 1)

äußerer Durchmesser d_o	140 mm
innerer Durchmesser d_i	8 mm
äußere Geschwindigkeit (am Düsenaustritt)	0.5 m/s
innere Geschwindigkeit (am Düsenaustritt) U_0	35.9 m/s
äußerer Volumenstrom	27.6 m ³ /h
innerer Volumenstrom	6.5 m ³ /h
Kinematische Viskosität ν	14 × 10 ⁻⁶ m ² /s (Luft)
Reynolds-Zahl $Re = \frac{U_0 d_i}{\nu}$	2 × 10 ⁴

wobei $f_\theta(\theta|\xi)$ die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Durchflugzeiten θ eines Fluidelementes ist, das die Distanz ξ überwinden muss. Da die Durchflugzeit von der Geschwindigkeit abhängt, hängt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Durchflugzeiten von der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Geschwindigkeiten $f(u)$ in der Form

$$f_\theta(\theta|\xi) = \frac{|\xi|}{\theta^2} f\left(\frac{\xi}{\theta}\right)$$

ab. Durch Einführung einer Zeitverzögerung τ kann daraus die zeitliche Kreuzkorrelation $\rho(\tau, \xi)$ für einen angenommenen Abstand ξ der Messvolumen abgeleitet werden.

$$\rho(\tau, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau - \theta) f_\theta(\theta|\xi) d\theta$$

Die longitudinale räumliche Korrelationsfunktion ist in dieser Raum-Zeit-Korrelation durch

$$\rho_l(\xi) = \rho(0, \xi)$$

und die Eulersche zeitliche Korrelation als

$$\rho_E(\tau) = \rho(\tau, 0)$$

enthalten.

2 Messung in einem turbulenten, runden Freistrah

In der Mitte eines runden, turbulenten Luft-Freistrahls wurden Zweipunkt-LDA-Messungen der Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung durchgeführt (Abb. 1). Die Messvolumenanordnung war 320 mm (40 innere Durchmesser d_i) stromabwärts hinter dem Düsenaustritt. Der Abstand

Tabelle 2: LDA-System

Laser	Ar ⁺ , max. 5 W, genutzt 500 mW, multi-mode
Wellenlänge	514.5 nm and 488 nm
Optische Konfiguration	fasergekoppelte Sonde, Rückstreuung
Frequenzverschiebung	Bragg-Zelle, 40 MHz
Brennweite	310 mm
Messvolumen	400 μm \times 50 μm
Processor	IFA750

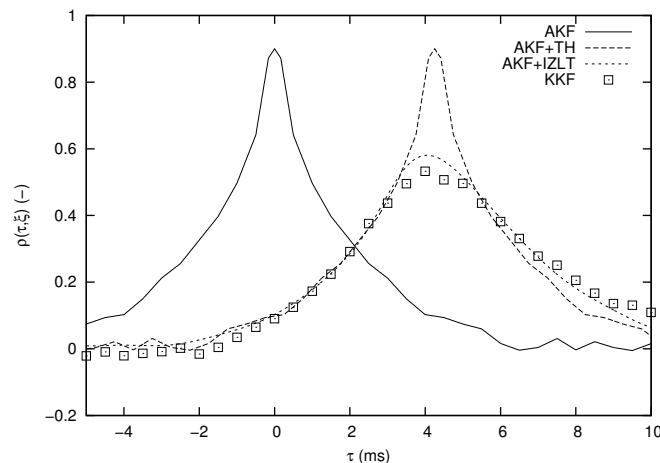


Abbildung 2: Raum-Zeit-Korrelationen mittels der Taylor-Hypothese (TH) bzw. der integralen Transformation (IZLT) aus der Autokorrelationsfunktion (AKF) einer Einpunktmessung im Vergleich zur gemessenen Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) der Zweipunktmessungen für einen Abstand der Messvolumen von $\xi = 32 \text{ mm}$ ($4d_i$, Experiment 1).

untereinander wurde zwischen 0 (überlappende Messvolumen) und 32 mm ($4d_i$) variiert. Die Spezifikationen der Strömung sind in Tab. 1 und die des LDA-Systems in Tab. 2. Die Zweipunktmessungen wurden zu zeitlichen Kreuzkorrelationsfunktionen (KKF) des jeweiligen Abstandes der Messvolumen verarbeitet. Aus den Messungen mit überlappenden Messvolumen wurde ein langer Datensatz zu einer Autokorrelationsfunktion (AKF) und mittels der Taylor-Hypothese (TH) bzw. der integralen Transformation (IZLT) zu Vorhersagen der Kreuzkorrelation verarbeitet.

Abb. 2 zeigt die beiden Vorhersagen der Kreuzkorrelationsfunktion im Vergleich zur gemessenen. Durch die Annahme der konstanten Transportgeschwindigkeit U , verschiebt die TH den Autokorrelationspeak zeitlich um ξ/U . Das Resultat stimmt weder mit der gemessenen Kreuzkorrelationsfunktion der Zweipunktmessung noch mit dem erwarteten Charakter des Transportes kohärenter Strukturen in einer turbulenten Strömung überein. Demgegenüber zeigt die IZLT eine wesentlich komplexere Veränderung des Korrelationspeaks, die mit der gemessenen Kreuzkorrelationsfunktion gut übereinstimmt. Neben der verringerten Höhe des Korrelationspeaks und dessen Verbreiterung werden außerdem auch die zeitliche Verzögerung des Maximums des Korrelationspeaks gegenüber der mittleren Geschwindigkeit und die leichte Schiefe des Korrelationspeaks korrekt reproduziert.

In Abb. 3 sind die ersten 15 Fourier-Koeffizienten der Übertragungsfunktion dargestellt. Diese Darstellung ist zwar redundant zur korrekten Reproduktion der Zeit-Raum-Korrelation in Abb. 2, dennoch ist hier die Wirkung der Vorhersagemodelle gut zu erkennen. Während die Koeffizienten durch die TH nur in der komplexen Ebene mit konstanter Amplitude gedreht werden, reproduziert die IZLT die mit wachsender Frequenz sinkende Amplitude korrekt.

Die hohe Vorhersagequalität der IZLT ist in diesem Experiment gegeben, da die Annahme geringer Abnahme der Lagrangeschen Korrelation während der Passage der Messvolumenanordnung hier ausreichend erfüllt ist. Über die Korrektheit dieser Annahme kann die Bestimmung des integralen Zeitmaßes

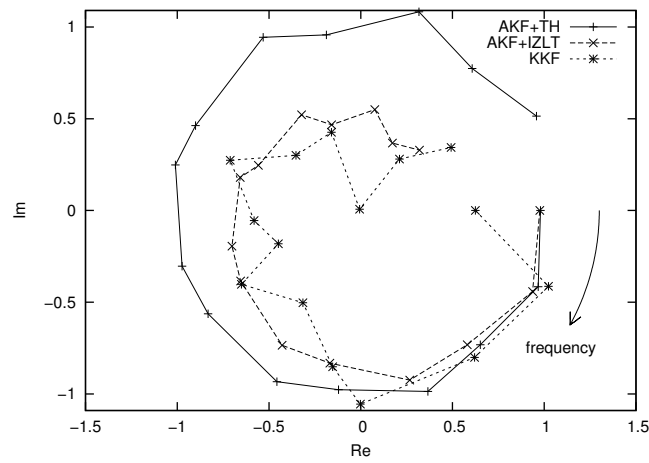


Abbildung 3: Fourier-Moden der Übertragungsfunktion aus der Autokorrelationsfunktion einer Einpunktmessung mittels der Taylor-Hypothese (AKF+TH) bzw. der integralen Transformation (AKF+IZLT) im Vergleich zur gemessenen Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) der Zweipunktmessungen für einen Abstand der Messvolumen von $\xi = 32 \text{ mm}$ ($4d_t$, Experiment 1).

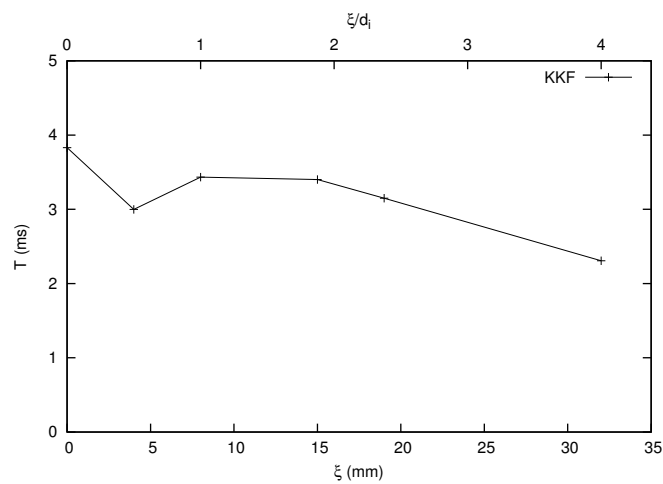


Abbildung 4: Integrales Zeitmaß T aus der Kreuzkorrelationsfunktion der Zweipunktmessungen als Funktion des Messpunktabstandes.

aus den Zweipunktmessungen Auskunft geben. In Abb. 4 ist das integrale Zeitmaß dargestellt, wie es aus den Kreuzkorrelationen der Zweipunktmessungen bestimmt wurde. Eine Abnahme ist zu erkennen, die darauf schließen lässt, dass die Lagrangesche Korrelation während der Passage der Messvolumenanordnung bereits etwas abnimmt. Die Abnahme ist aber hier gering genug, sodass die Annahme global variabler, aber während der Passage der Messvolumenanordnung konstanter Geschwindigkeit ausreichend erfüllt ist.

3 Zeit-Raum-Korrelation für endliche Lagrangesche Korrelation

Ist die Änderung der Geschwindigkeit während der Passage der Messvolumenanordnung zu groß, dann ist bei der Transformation die abnehmende Lagrangesche zeitliche Korrelation $\rho_L(\tau)$ zu berücksichtigen. Die Transformation der Eulerschen zeitlichen Autokorrelationsfunktion $\rho_E(\tau)$ in die Zeit-Raum-Korrelation wird dann zu

$$\rho(\tau, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_L(\theta) \rho_E(\tau - \theta) f_\theta(\theta|\xi) d\theta.$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_\theta(\theta|\xi)$ der Durchflugzeiten eines Fluidelementes muss jetzt neben der zufälligen Geschwindigkeit u mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(u)$ auch die abnehmende Lagrangesche Korrelation berücksichtigen, und zwar auch für wiederholtes Passieren des zweiten Messvolumens, da bei starken Turbulenzen ein bestimmtes Fluidelement auch mehrfach das Messvolumen durchqueren kann.

Um die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_\theta(\theta|\xi)$ der Durchflugzeiten herzuleiten, wird zunächst die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_\xi(\xi|\theta)$ der von einem Fluidelement nach der Zeit θ erreichten Distanz ξ bestimmt. Bei nachlassender Lagrangescher Korrelation während der Durchflugzeit ist die während der Zeit θ erreichte Distanz ξ zufällig mit einem Mittelwert μ_ξ und einer Varianz σ_ξ^2 , beide als Funktionen der Flugzeit θ . Wird die Bewegung durch ein Dispersionsmodell beschrieben, dann erhält man

$$\mu_\xi(\theta) = U\theta$$

und nach [2]

$$\sigma_\xi^2(\theta) = 2\sigma_u^2 \int_0^\theta \int_0^\tau \rho_L(\eta) d\eta d\tau$$

bzw. nach [3]

$$\sigma_\xi^2(\theta) = 2\sigma_u^2 \int_0^\theta (\theta - \eta) \rho_L(\eta) d\eta,$$

wobei U wieder die mittlere Geschwindigkeit ist und σ_u^2 die Varianz der Geschwindigkeit.

Leider ist unter der Annahme einer zeitlichen Lagrangeschen Korrelation die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt θ nicht unabhängig von der bis zu diesem Zeitpunkt zurückgelegten Distanz. Deshalb wird die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $f_\xi(\xi|\theta)$ zu $f_\xi(\xi|\theta, u)$, welches die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte des in der Zeit θ zurückgelegten Weges ξ ist, unter der Annahme, dass die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt θ gerade u ist. Diese bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte ist

$$f_\xi(\xi|\theta, u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2(\theta, u)}} e^{-\frac{[\xi - \mu_\xi(\theta|u)]^2}{2\sigma_\xi^2(\theta|u)}}$$

mit

$$\mu_\xi(\theta|u) = \theta U + (u - U) \int_0^\theta \rho_L(\eta) d\eta$$

und

$$\sigma_\xi^2(\theta|u) = 2\sigma_u^2 \int_0^\theta (\theta - \eta) \rho_L(\eta) d\eta - \sigma_u^2 \left[\int_0^\theta \rho_L(\eta) d\eta \right]^2.$$

Tabelle 3: Strömungsparameter (Experiment 2)

äußerer Durchmesser d_o	55 mm
innerer Durchmesser d_i	6 mm
innere Geschwindigkeit (am Düsenaustritt) U_0	44.5 m/s
Kinematische Viskosität ν	$14 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (Luft)
Reynolds-Zahl $Re = \frac{U_0 d_i}{\nu}$	1.9×10^4

Für eine gegebene Geschwindigkeit $u(\theta)$ aus einer zufälligen Verteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(u)$ ist dann die Wahrscheinlichkeitsdichte der Durchflugzeiten $f_\theta(\theta|\xi)$ der gegebenen Distanz ξ einerseits proportional zu der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_\xi(\xi|\theta, u)$, dass ein Fluidelement nach der Zeit θ die Distanz ξ mit der Geschwindigkeit u erreicht

$$f_\theta(\theta|\xi) \propto f_\xi(\xi|\theta, u)$$

und andererseits zum Betrag der Geschwindigkeit

$$f_\theta(\theta|\xi) \propto |u(\theta)|.$$

Die Integration über alle möglichen Geschwindigkeiten u ergibt dann

$$f_\theta(\theta|\xi) = c \int_{-\infty}^{\infty} |u| f_\xi(\xi|\theta, u) f(u) du,$$

wobei c so festzulegen ist, dass

$$\int_0^{\infty} f_\theta(\theta|\xi) d\theta = 1$$

erfüllt ist.

Die verwendeten Integrale sind alle aus den gemessenen Daten zu berechnen. Die ebenfalls für die Herleitung verwendete Lagrangesche Korrelation ist dagegen nicht direkt aus den Messdaten bestimmbar. Eine grobe Abschätzung kann anhand des bereits oben verwendeten integralen Zeitmaßes der Zeit-Raum-Korrelationen für verschiedene Messvolumenabstände aus den Zweipunktmessungen erfolgen. Die primäre Funktion ist dabei das integrale Zeitmaß als Funktion des Messvolumenabstandes. Hieraus muss die zeitliche Abnahme der Korrelation bestimmt werden. Das kann wieder auf verschiedene Weise unter verschiedenen Annahmen erfolgen, die Gegenstand dieses gesamten Beitrages sind. Da die Abschätzung der Lagrangeschen Korrelationsfunktion für die eingeführte Zeit-Längen-Transformation nicht besonders genau erfolgen muss, reicht in diesem Fall sogar die ansonsten nicht empfohlene TH völlig aus. Mit diesen gemessenen oder aus den Messdaten abgeschätzten Größen und Funktionen kann dann eine neue Vorhersage der Zeit-Raum-Korrelation aus den Einpunktmessungen bei nachlassender Lagrangescher Korrelation erfolgen.

4 Messung in einem turbulenten, runden Freistrahls für endliche Lagrangesche Korrelation

Um die Vorhersage der Zeit-Raum-Korrelation aus der zeitlichen Eulerschen Autokorrelationsfunktion unter Berücksichtigung der nachlassenden Lagrangeschen Korrelation zu testen, wurde ein zweites Experiment in einer anderen Strömung durchgeführt, bei dem ein signifikanter Abfall der Lagrangeschen Korrelation während der Passage der Messvolumenanordnung zu verzeichnen war. Die Messungen wurden wieder in der Mitte eines runden, turbulenten Luft-Freistrahls durchgeführt. Die Messvolumenanordnung war 240 mm (wieder 40 innere Durchmesser d_i) stromabwärts hinter dem Düsenaustritt. Der Abstand untereinander wurde zwischen 0 (überlappende Messvolumen) und 60 mm ($10d_i$) variiert. Die Spezifikationen der Strömung sind in Tab. 3. Die Berechnungen sind so wie im ersten Experiment, nur dass zusätzlich die Vorhersage der Raum-Zeit-Korrelation mittels der integralen Zeit-Längen-Transformation unter Berücksichtigung der nachlassenden Lagrangeschen Korrelation (IZLT2)

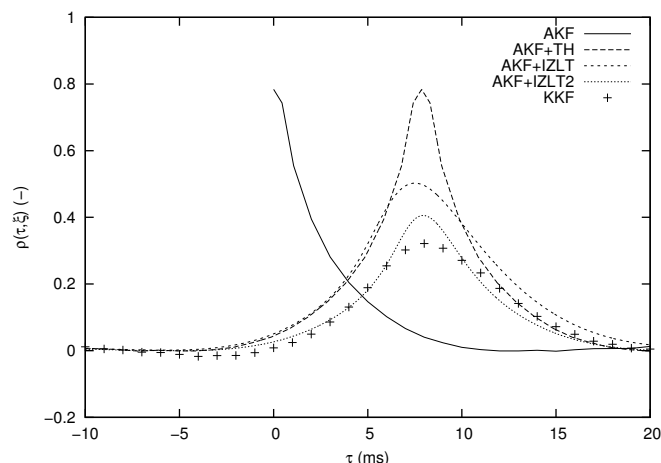


Abbildung 5: Raum-Zeit-Korrelationen mittels der Taylor-Hypothese (TH), der integralen Transformation (IZLT) bzw. der integralen Transformation unter Einbeziehung der Lagrangeschen Korrelation (IZLT2) aus der Autokorrelationsfunktion (AKF) einer Einpunktmessung im Vergleich zur gemessenen Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) der Zweipunktmessungen für einen Abstand der Messvolumen von $\xi = 40 \text{ mm}$ ($6.7d_i$, Experiment 2).

erfolgte. Die Abschätzung der Lagrangeschen Korrelationsfunktion erfolgte wie oben beschrieben aus den integralen Zeitmaßen der Zweipunktmessungen.

Abb. 5 zeigt die Vorhersagen der verschiedenen Transformationen im Vergleich zur gemessenen Kreuzkorrelation für $\xi = 40 \text{ mm} = 6.7d_i$. Während die TH wieder die zeitliche Eulersche Korrelationsfunktion um ξ/u verschiebt, ist die Vorhersage der IZLT wieder deutlich komplexer. Diesmal ist die Vorhersage der Korrelation wegen der nicht berücksichtigten nachlassenden Lagrangeschen Korrelation zu groß. Die Vorhersage der IZLT2 kommt den gemessenen Werten dagegen deutlich näher. Dennoch sind zwischen dem Verlauf der vorhergesagten Korrelation und der gemessenen Unterschiede zu sehen, die darauf hindeuten, dass das zur Vorhersage verwendete Transportmodell die Eigenschaften des realen Transportprozesses nicht vollständig erfasst.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Die ersten Ergebnisse des neuen Transportmodells, um Eulersche zeitliche Korrelationen in longitudinale räumliche oder Zeit-Raum-Korrelationen unter Berücksichtigung einer abnehmenden Lagrangeschen Korrelation zu transformieren, sind vielversprechend und könnten die Vorhersage von statistischen Kennfunktionen in einem turbulenten Skalenbereich ermöglichen, in dem komplexe Interaktionen zwischen kleineren und größeren turbulenten Strukturen stattfinden. Die gefundenen Abweichungen zwischen den vorhergesagten und den gemessenen Zeit-Raum-Korrelationen deuten auf Einschränkungen der Gültigkeit des Transportmodells, der Transformation oder von beiden hin. Für eine noch bessere Vorhersage der Korrelationsfunktionen durch das Transportmodell und die Transformation sollen sowohl der Transport kohärenter Strukturen in turbulenten Strömungen als auch die Abbildung der Bewegung auf die zu messenden Statistiken näher untersucht werden. In diesem Beitrag wurde die Eulersche zeitliche Korrelationsfunktion unter der Berücksichtigung der Lagrangeschen Korrelationsfunktion direkt in die Zeit-Raum-Korrelationen transformiert. In der Realität sind dagegen die Eulersche und die Zeit-Raum-Korrelation Projektionen der Lagrangeschen Korrelation, was in Weiterentwicklungen der Transformation evtl. berücksichtigt werden muss.

Literatur

- [1] H Nobach and C Tropea. A statistical method for transforming temporal correlation functions from one-point measurements into longitudinal spatial and spatio-temporal correlation functions. *Exp. in Fluids*, 53:1815–1821, 2012.
- [2] G I Taylor. Diffusion by continuous movements. *Proc. R. Math. Soc. Ser. 2*, 20:196–212, 1921.

- [3] J D Wilson and Y Zhuang. Restriction on the timestep to be used in stochastic Lagrangian models of turbulent dispersion. *Boundary-Layer Meteorology*, 49:309–316, 1989.