

Iterative Image Deformation PIV bei individueller Intensitätsänderung von Streuteilchen

Iterative image deformation PIV at individual intensity variations of tracer particles

H. Nobach

Max-Planck-Institut für Dynamik und Selbstorganisation, Bunsenstr. 10, 37073 Göttingen

PIV, Bilddeformation, Genauigkeit

PIV, image deformation, accuracy

Übersicht

Wegen der potentiell höheren räumlichen Auflösung gewinnen iterative PIV-Verfahren mit Bildverschiebung und -deformation möglicher Weise gegenüber klassischen, nicht-iterativen PIV-Verfahren, Mehrschrittverfahren mit Verschiebung um volle Pixel sowie iterativen PIV-Verfahren mit Subpixelverschiebung und Deformation der Abfragefenster an Bedeutung. Gleichzeitig können mit der iterativen Bildverschiebung und -deformation wie bereits mit der iterativen Verschiebung und Deformation der Abfragefenster in Simulationen Genauigkeiten bei der Schätzung der Subpixelverschiebung zwischen den beiden PIV-Aufnahmen von besser als 0,01 Pixel nachgewiesen werden. Die Ergebnisse mit experimentellen Bildern bleiben normaler Weise deutlich dahinter zurück, wo die erreichbare Genauigkeit bei etwa 0,1 Pixel liegt. Eine Ursache für die Begrenzung der Genauigkeit liegt in der individuellen Änderung der Intensitäten der Streuteilchen zwischen den Aufnahmen, die bei PIV-Messungen in dreidimensionalen Strömungen bei der Ausleuchtung mit einem Lichtschnitt auftreten, während sie in Computersimulationen oft nicht berücksichtigt werden. Während die Fehlerwirkung dieses Einflusses auf die Ergebnisse korrelationsbasierter PIV-Verarbeitung prinzipiell bereits bekannt ist, wird in diesem Beitrag der Zusammenhang der Fehlerwirkung mit dem räumlichen Auflösungsvermögen des betrachteten PIV-Verfahrens am Beispiel der iterativen Bildverschiebung und -deformation dargestellt.

1 Einleitung

PIV (Particle Image Velocimetry) nutzt die Korrelation kleiner Ausschnitte aus zeitlich kurz nacheinander aufgenommenen Streubildern einer teilchenbeladenen Strömung, um die lokale Verschiebung des Teilchenensembles zu bestimmen [15, 38, 39, 43]. Viele Verfahren wurden entwickelt, um die Bestimmung der Verschiebung mit Subpixelgenauigkeit oder die räumliche Auflösung trotz der verfahrensinhärenten Mittelung über Bildbereiche zu verbessern. Beispiele dafür sind:

- Subpixelinterpolation der diskreten Korrelationsfunktion mit Gauß-Interpolation [43], Sinc-Interpolation [20, 30] oder Polynom-Interpolation [6], die das „Pixel Locking“ [7, 9, 20, 29, 41] gegenüber der Schwerpunktbestimmung [1, 21] verringern
- Fensterfunktionen, die am Rand der Abfragefenster zu null werden [10, 19] und damit den Fehlereinfluss von Teilchenabbildungen verringern, die am Rand des Abfragefensters

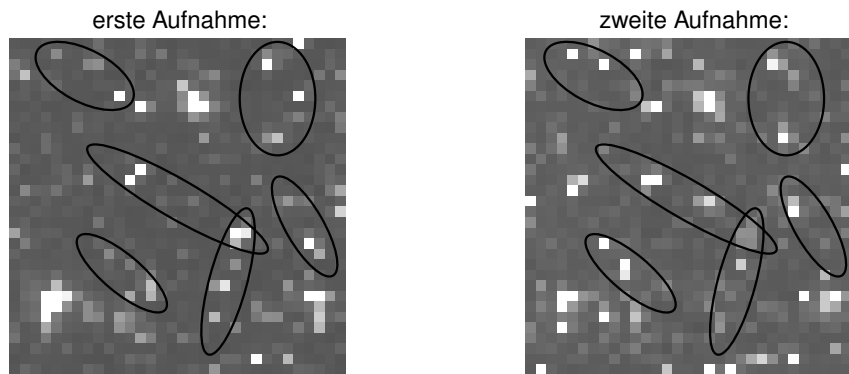


Abbildung 2: Beispiele für individuelle Variation der Teilchenhelligkeit (eingekreiste Regionen, Detail der frei zugänglichen PIV-Bilder der PIV challenge 2003, Fall A: achsensymmetrischer, turbulenter Strahl in ruhender Umgebung, Bilder A001a und A001b)

zufälligen Verteilung der Teilchen im Lichtschnitt erfolgt die Helligkeitsänderung zwischen den Aufnahmen für jedes Teilchen unterschiedlich (Abb. 1a). Diese individuelle Helligkeitsänderung tritt selbst in homogenen Strömungen auf und kann in vielen PIV-Experimenten beobachtet werden (Abb. 2). In Simulationen wird oft angenommen, dass die Teilchenabbildungen untereinander unterschiedliche Helligkeit haben, aber die gleiche in den beiden Aufnahmen. Das kann in der Realität nur in zweidimensionalen Strömungen mit exakt parallel zum Strömungsfeld ausgerichteten Lichtschnitten erreicht werden (Abb. 1b).

In [22] und [23] wurde der Einfluss der individuellen Helligkeitsschwankungen auf klassische PIV-Verfahren inklusive Anwendung von Fensterfunktionen, direkter Korrelation sowie iterative Verschiebung und Deformation der Abfragefenster untersucht. Nach einer kurzen Darstellung des Effektes der Helligkeitsschwankungen auf die PIV-Bildverarbeitung wird die besonders starke Fehlerwirkung auf räumlich hoch auflösende PIV-Verfahren wie der iterativen Bilddeformation gezeigt. Dabei werden sowohl das Potential zur Verbesserung der räumlichen Auflösung als auch der besonders starke Einfluss der Helligkeitsschwankungen gezeigt.

2 Fehler durch Helligkeitsschwankungen

Die Verschiebung zwischen den beiden aufgenommenen Streuteilchenmustern wird aus der Maximumposition in der zweidimensionalen Kreuzkorrelationsfunktion der beiden Bilder gewonnen. Sind ausreichend viele Teilchenabbildungen in einem betrachteten Bildausschnitt, jede Abbildung mit unterschiedlicher Helligkeit aber gleicher Helligkeit in den beiden Aufnahmen und keine abgeschnittenen Teilchenabbildungen am Rand des untersuchten Bildausschnitts, dann ist die Maximumposition in der Korrelationsebene an der korrekten Stelle, selbst wenn sich die Teilchenabbildungen überlappen.

Die Maximumposition bleibt auch dann an der richtigen Stelle, wenn sich die Intensitäten der Streuteilchenabbildungen zwischen den Aufnahmen individuell verschieden ändern, solange sich die Teilchenabbildungen nicht überlappen. Bei Änderung der relativen Intensität zwischen den Aufnahmen bei gleichzeitiger Überlappung der Teilchenabbildungen verschiebt sich die Maximumposition in der Kreuzkorrelationsfunktion (Abb. 3a) und erzeugt damit einen systematischen Fehler der Verschiebungsschätzung. Die Größe des Fehlers hängt von den relativen Amplituden, dem Durchmesser und dem Grad der Überlappung der Teilchenabbildungen ab. Dieser Fehler tritt auch bei rechteckförmigem Lichtschnittprofil auf, bei dem eine der überlappenden Teilchenabbildungen den Lichtschnitt zwischen den beiden Aufnahmen verlässt oder in diesen hineintritt (Abb. 3b).

Für die PIV-Auswertung ergibt sich damit ein neuer Fehler der Verschiebungsschätzung, falls es Überlappungen von Teilchenabbildungen gibt, während sich die relativen Intensitäten zwischen den Aufnahmen ändern. Der Fehler ist besonders groß bei defokussierten Abbildungen

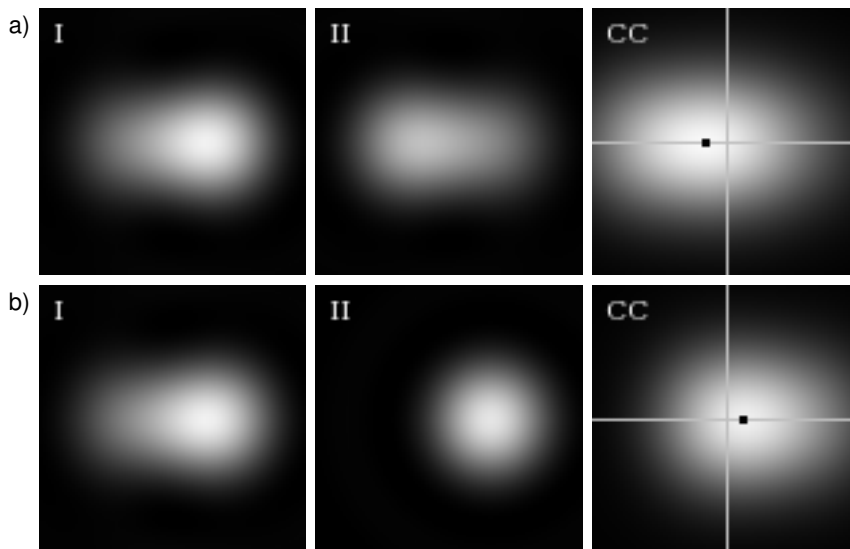


Abbildung 3: Zwei Aufnahmen (I and II) mit je zwei Teilchenabbildungen (Airy-Scheiben) mit relativer Helligkeitsschwankung und Überlappung an identischen Positionen. Die Kreuzkorrelationsfunktion (CC) mit markierten Nullverschiebungen in x - und y -Richtung und markierter Maximumsposition (schwarzer Punkt), die deutlich von der korrekten Position (Nullverschiebung in beide Richtungen) abweicht. a) Gauß-förmiger Lichtschnittsprofil und b) Rechteckprofil.

(mit entsprechend starken Überlappungen) für Strömungen mit starker Komponente senkrecht zum Laserlichtschnitt (mit veränderter Beleuchtung der Teilchen in den beiden Aufnahmen) und für hoch auflösende PIV-Analyseverfahren, wie in den nächsten Abschnitten gezeigt wird. Um die Dominanz des Fehlers aufgrund der Helligkeitsschwankungen auf korrelationsbasierte PIV-Verfahren zu demonstrieren, wird die Wirkung auf eine iterative Verschiebung und Deformation der Abfragefenster mit einer Bildinterpolation mit bikubischen Splines, anerkannt als eines der besten Verfahren der PIV-Bildanalyse, in einer Rechnersimulation mit rechteckförmigem Lichtschnitt und gleichverteilter, zufälliger Helligkeit der Einzelteilchen gezeigt. In Abb. 4 ist die empirisch bestimmte Standardabweichung des totalen Fehlers in Abhängigkeit vom simulierten Durchmesser der Teilchenabbildung für drei Testfälle gezeigt:

1. Für eine Bewegung der Teilchen parallel zum Lichtschnitt (ohne Rauschen) treten für Durchmesser der Teilchenabbildung größer als 3 Pixel Fehler von weniger als 0,01 Pixel auf. Für kleinere Durchmesser der Teilchenabbildung begrenzt die Unterabtastung die erreichbare Genauigkeit auf ca. 0,1 Pixel für einen Durchmesser von 1 Pixel.
2. Für eine Bewegung der Teilchen parallel zum Lichtschnitt mit Photonenrauschen (1000 Photoelektronen erzeugen ein Rauschen von ca. 32 Elektronen, 10 Elektronen pro Bit ergeben eine Intensität von 100) und Quantisierungsrauschen ist der Fehler für Durchmesser der Teilchenabbildung größer als 3 Pixel deutlich größer als zuvor, aber immer noch unterhalb von 0,01 Pixel.
3. Für eine Bewegung auch senkrecht zum Lichtschnitt (hier $\frac{1}{4}$ der Lichtschnittdicke) hat der Fehler ein Minimum bei einem Durchmesser der Teilchenabbildung von ca. 2 Pixel und ist mit 0,04 Pixel deutlich größer als in den Fällen zuvor.

In den folgenden Abschnitten wird die besonders starke Wirkung dieses Fehlereinflusses auf hoch auflösende PIV-Verfahren gezeigt.

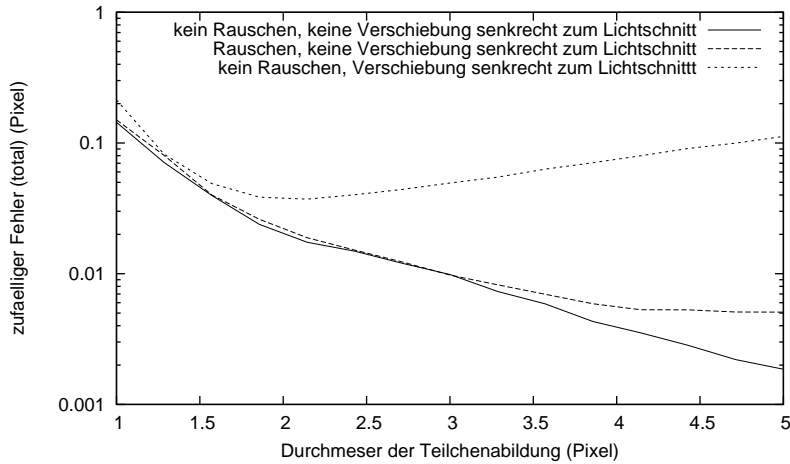


Abbildung 4: Standardabweichung des totalen Fehlers der Verschiebungsschätzung als Funktion des Durchmessers der Teilchenabbildung unter verschiedenen Simulationsbedingungen (Bewegung nur parallel zum Lichtschnitt ohne Rauschen, Bewegung nur parallel zum Lichtschnitt mit Rauschen, Bewegung um $1/4$ der Lichtschnittbreite senkrecht zum Lichtschnitt, iterative Verschiebung und Deformation der Abfragefenster mit bikubischen Splines für die Bildinterpolation).

3 Simulation

Vor der Demonstration der starken Fehlerwirkung individueller Helligkeitsschwankungen der Teilchenabbildungen auf hoch auflösende PIV-Verfahren wird zunächst die räumliche Auflösung der zu vergleichenden Verfahren untersucht. Dafür wurden 100 Bildpaare mit 512×512 Pixeln mit zufälligen Verschiebungen (zweidimensional, Pixelauflösung, Bewegung parallel zum Lichtschnitt) generiert. Die Teilchenabbildungen sind Airy-Scheiben mit gleichverteilter, zufälliger Maximumintensität und 3 Pixel Durchmesser (erste Nullstelle). Die Bilder wurden mit einer iterativen Verschiebung der Abfragefenster und Deformation 1. Ordnung [32] mit 32×32 und 16×16 Pixeln und mit einer iterativen Bilddeformation mit einem Dreiecksfenster (exakt wie in [25]) mit 32×32 Pixeln verarbeitet. Um die Wirkung der Fensterfunktion auf die effektive Fenstergröße zu isolieren, wird außerdem das Dreiecksfenster auch auf die iterative Verschiebung und Deformation des Abfragefensters mit 32×32 Pixeln angewendet. Alle untersuchten Verfahren verwenden ein 8×8 -Pixel-Abfrageraster der Verschiebung.

Aus dem Feld der Verschiebungsschätzungen im 8×8 -Pixel-Raster wird mit bikubischen Splines für jedes Pixel eine Verschiebung interpoliert. Aus den interpolierten Werten der Schätzung und dem ursprünglich simulierten Verschiebefeld wird eine zweidimensionale Kohärenzfunktion

$$C_{ij} = \frac{\langle U_{\text{est},ij}^* U_{\text{sim},ij} + V_{\text{est},ij}^* V_{\text{sim},ij} \rangle}{\langle U_{\text{sim},ij}^* U_{\text{sim},ij} + V_{\text{sim},ij}^* V_{\text{sim},ij} \rangle} \quad (1)$$

berechnet, wobei $U_{\text{sim},ij}$ und $V_{\text{sim},ij}$ die zweidimensionalen Fourier-Transformierten der simulierten Verschiebungsfelder u und v , $U_{\text{est},ij}$ und $V_{\text{est},ij}$ die entsprechenden Pendanten der Schätzung sind. Die eckigen Klammern bedeuten eine Ensemblemittelung und der Stern kennzeichnet die Konjugiertkomplexe. Die Kohärenzfunktion wird elementweise für die zweidimensionalen Funktionen berechnet. Aus der zweidimensionalen Kohärenzfunktion wird dann eine eindimensionale Frequenzantwort c_i abgeleitet, indem die Produkte $c_i c_j$ an die zweidimensionale Funktion C_{ij} mit minimaler L_2 -Norm angepasst werden.

Abb. 5 zeigt die Frequenzantwortfunktionen für die vier untersuchten Verfahren. Für das Rechteckfenster wird die Frequenzantwort entsprechend der Fenstergröße von 32×32 bzw. 16×16 Pixeln bei $1/32$ Pixel bzw. $1/16$ Pixel negativ. Das Dreiecksfenster führt bei der iterativen Fensterver-

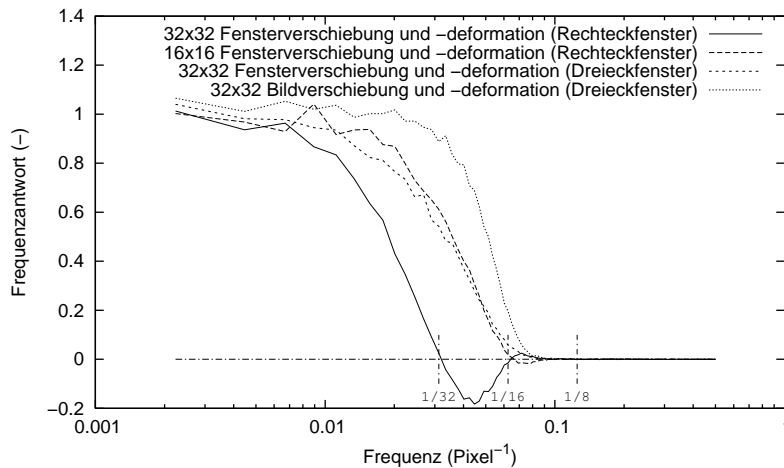


Abbildung 5: Frequenzantwort für die verschiedenen PIV-Verfahren, empirisch bestimmt aus einer Serie von PIV-Bildern mit zufälligem Verschiebungsfeld

schiebung und -deformation zu einer im gesamten Frequenzbereich positiven Antwortfunktion. Die Auflösung bei einem Abfragefenster mit 32×32 Pixeln ist etwa so groß wie die eines Abfragefensters mit 16×16 Pixeln mit Rechteckfensterfunktion. Bei allen drei Verfahren ist die räumliche Auflösung durch die Fenstergröße definiert und verändert sich mit zunehmender Zahl der Iterationsschritte nicht. Nur bei der iterativen Bilddeformation wird die räumliche Auflösung mit weiteren Iterationsschritten verbessert und ist dann vom 8×8 Pixel großen Abfrageraster der Verschiebungswerte begrenzt.

In einer weiteren Rechnersimulation wird ein homogenes Verschiebungsfeld mit einer zufälligen Verschiebung aus dem Bereich von ± 1 Pixel parallel zum Lichtschnitt und mit unterschiedlicher Verschiebung senkrecht zum Lichtschnitt generiert. Der Lichtschnitt hat ein Rechteckprofil und die Teilchenabbildungen haben die Form einer Airy-Scheibe mit 3 Pixel Durchmesser und einer gleichverteilten, zufälligen Maximalintensität. Die synthetischen Bilder wurden mit den vier Verfahren wie zuvor analysiert. Aus den Werten der Verschiebungsschätzung im Raster von 8×8 Pixeln wurde im Vergleich zur Simulation die Standardabweichung des totalen Fehlers bestimmt.

Abb. 6 zeigt die Abhängigkeit des Fehlers von der Verschiebung senkrecht zum Lichtschnitt. Der Fehler wächst bis zu einer Verschiebung um die halbe Lichtschnittdicke senkrecht zum Lichtschnitt exponentiell an. Danach wird die Schätzung unzuverlässig und Ausreißer dominieren den Fehler. Der Fehler der verschiedenen PIV-Verfahren korrespondiert dabei genau mit der erreichbaren Auflösung. Eine schlechtere Auflösung entspricht einer Mittelung über einen größeren Bereich, bei der auch die lokalen Abweichungen geglättet werden.

4 Experiment

Die experimentelle Verifikation der Simulationsergebnisse erfordert eine exakte Synchronisation der Bewegung parallel und senkrecht zum Lichtschnitt. Dafür wurden Lichtschnitte von einem Beamer in ein Teilchenensemble projiziert (Abb. 7). Ein Beamer mit LCD-Technologie hat den Vorteil eines zeitlich stabilen Lichtschnittbildes. Der hier verwendete DLP-Beamer erzeugt die unterschiedlichen Grauwerte durch Pulsbreitenmodulation, was zu Fehlern der Beleuchtung bei kurzen Verschlusszeiten der Kamera führt. Die Untersuchungen wurden deshalb mit einer Belichtungszeit von $0,25$ s durchgeführt, was 30 Belichtungszyklen des Beamers entspricht. Eine so lange Belichtungszeit erfordert niedrige Geschwindigkeiten, die hier mit einem festen Glasblock und eingeschlossenen Markierungen auf einem Hebetisch realisiert wurden. Der Glasblock ist $5 \times 5 \times 8$ cm³ groß und enthält 54000 zufällig angeordnete Markierungen im inneren Volumen von $3 \times 3 \times 6$ cm³, was einer Teilchendichte von 1 mm⁻³ entspricht. Der Glasblock bewegt sich senkrecht nach oben, während der projizierte Lichtschnitt gegenüber der

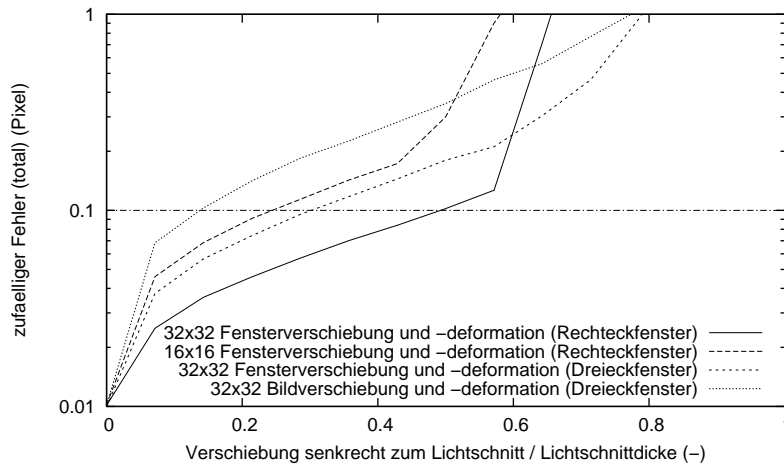


Abbildung 6: Standardabweichung des totalen Fehlers der Verschiebungsschätzung bei einem homogenen Verschiebungsfeld als Funktion der Verschiebung senkrecht zum Lichtschnitt

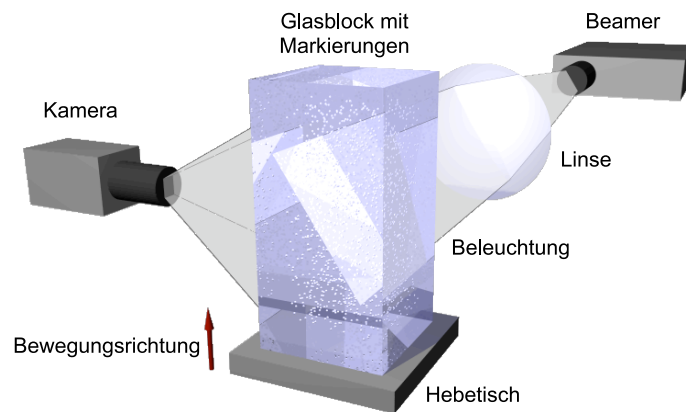


Abbildung 7: Experimenteller Aufbau zur Untersuchung von Verschiebungen senkrecht zum PIV-Lichtschnitt: Ein Beamer projiziert den Lichtschnitt in einen Glasblock, der mit Markern versehen ist. Eine Kamera beobachtet das beleuchtete Streuteilchenmuster.

Bewegung gedreht ist. Während der gleichförmigen Bewegung des Glasblocks mit $0,1 \text{ mm s}^{-1}$ wurden 80 Bilder mit 480×480 Pixeln mit einer Bildrate von $0,8 \text{ Hz}$ aufgenommen. Durch Wahl des Abstandes der beiden zu korrelierenden Bilder können unterschiedliche Verschiebungen senkrecht zum Lichtschnitt initiiert werden. Aus jedem Bildpaar wurden 9×11 Verschiebevektoren bestimmt. Außerdem wurden die Ergebnisse aller Bildpaare gleichen Abstandes aus der Serie von 80 Aufnahmen gemittelt.

Abb. 8 zeigt den experimentell bestimmten Fehler der untersuchten PIV-Verfahren in Abhängigkeit von der Verschiebung senkrecht zum Lichtschnitt. Die Größenordnung und die Reihenfolge der vier Verfahren bestätigt die Ergebnisse der Simulation. Es gibt aber eine quantitative Abweichung, die möglicher Weise von der begrenzten Genauigkeit der verwendeten Mechanik und einer Beleuchtung von Teilchen außerhalb des Lichtschnitts durch die Streustrahlung von Teilchen im Lichtschnitt verursacht wird. Außerdem haben die Teilchen im Experiment fast gleiche Intensität während sie in der Simulation unterschiedliche Intensitäten hatten.

5 Zusammenfassung

Die Fehlerwirkung von individuellen Intensitätsschwankungen der Streuteilchen auf die räumlich hoch auflösende PIV-Analyse mit iterativer Bilddeformation wurde gezeigt. Im Vergleich mit anderen Verfahren wurde der mit der erreichbaren Auflösung anwachsende Fehlereinfluss nachgewiesen. Der größere Fehler ist somit der Preis für die verbesserte Auflösung, die mit

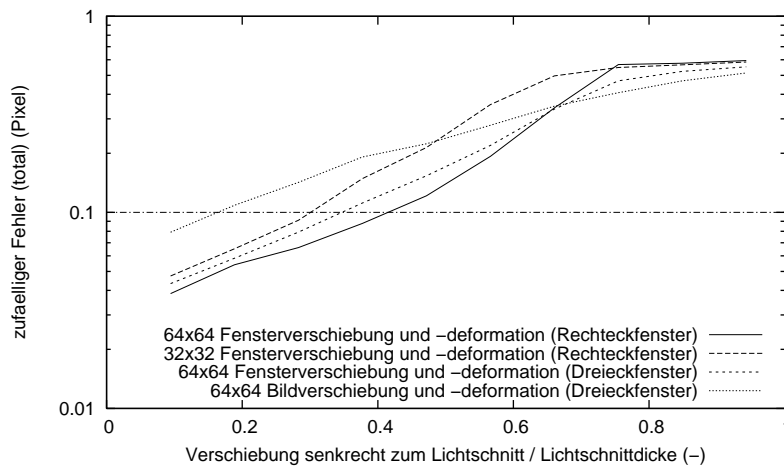


Abbildung 8: Standardabweichung des totalen Fehlers der Verschiebungsschätzung aus experimentellen Bildern als Funktion der Verschiebung senkrecht zum Lichtschnitt

iterativer Bilddeformation erzielt werden kann. Da bisher keine Möglichkeit einer Korrektur dieses Fehlers bekannt ist, muss ein Kompromiss zwischen erreichbarer Auflösung und Genauigkeit entweder durch Minimierung der Verschiebung senkrecht zum Lichtschnitt oder durch Mittelung über größere Bildbereiche gefunden werden. Die Mittelung über größere Bereiche widerspricht allerdings dem Einsatz von hoch auflösenden PIV-Verfahren wie der iterativen Bilddeformation.

Literatur

- [1] B F Alexander and K C Ng. Elimination of systematic error in sub-pixel accuracy centroid estimation. *Opt. Eng.*, 30:1320–1331, 1991.
- [2] T Astarita. Analysis of interpolation schemes for image deformation methods in PIV: effect of noise on the accuracy and spatial resolution. *Exp. in Fluids*, 40:977–987, 2006.
- [3] T Astarita. Analysis of weighting window functions for image deformation. *Exp. in Fluids*, 43:859–872, 2007.
- [4] T Astarita. Analysis of velocity interpolation schemes for image deformation methods in PIV. *Exp. in Fluids*, 45:257–266, 2008.
- [5] T Astarita and G Cardone. Analysis of interpolation schemes for image deformation methods in PIV. *Exp. in Fluids*, 38:233–243, 2005.
- [6] J Chen and J Katz. Elimination of peak-locking error in PIV analysis using the correlation mapping method. *Meas. Sci. Technol.*, 16:1605–1618, 2005.
- [7] K T Christensen. The influence of peak-locking errors on turbulence statistics computed from PIV ensembles. *Exp. in Fluids*, 36:484–497, 2004.
- [8] A Fincham and G Delerce. Advanced optimization of correlation imaging velocimetry algorithms. *Exp. in Fluids*, 29:S13–S22, 2000.
- [9] A M Fincham and G R Spedding. Low cost, high resolution DPIV for measurement of turbulent fluid flow. *Exp. in Fluids*, 23:449–462, 1997.
- [10] L Gui, W Merzkirch, and R Fei. A digital mask technique for reducing the bias error of the correlation-based PIV interrogation algorithm. *Exp. in Fluids*, 29:30–35, 2000.
- [11] H Huang, D Dabiri, and M Gharib. On errors of digital particle image velocimetry. *Meas. Sci. Technol.*, 8:1427–1440, 1997.
- [12] H T Huang, H E Fiedler, and J J Wang. Limitation and improvement of PIV; Part I: Limitation of conventional techniques due to deformation of particle image patterns. *Exp. in Fluids*, 15:168–174, 1993.

- [13] H T Huang, H E Fiedler, and J J Wang. Limitation and improvement of PIV; Part II: Particle image distortion, a novel technique. *Exp. in Fluids*, 15:263–273, 1993.
- [14] K Jambunathan, X Y Ju, B N Dobbins, and S Ashforth-Frost. An improved cross correlation technique for particle image velocimetry. *Meas. Sci. Technol.*, 6:507–514, 1995.
- [15] R D Keane and R J Adrian. Theory of cross-correlation analysis of PIV images. *Applied Scientific Research*, 49:191–215, 1992.
- [16] B Lecordier. *Etude de l'interaction de la propagation d'une flamme prémélangée avec le champ aérodynamique, par association de la tomographie Laser et de la Vélocimétrie par Images de particules*. PhD thesis, l'Université de Rouen, France, 1997.
- [17] B Lecordier and M Trinité. Accuracy assessment of image interpolation schemes for PIV from real images of particle. In *Proc. 13th Int. Symp. on Appl. of Laser Techn. to Fluid Mechanics*, Lisbon, Portugal, 2006. paper 26.4.
- [18] A Lecuona, J Nogueira, P A Rodríguez, and D Santana. Accuracy and time performance of different schemes of the local field correlation technique. *Exp. in Fluids*, 33:743–751, 2002.
- [19] Q Liao and E A Cowen. An efficient anti-aliasing spectral continuous window shifting technique for PIV. *Exp. in Fluids*, 38:197–208, 2005.
- [20] L Lourenco and A Krothapalli. On the accuracy of velocity and vorticity measurements with PIV. *Exp. in Fluids*, 18:421–428, 1995.
- [21] J S Morgan, D C Slater, J G Timothy, and E B Jenkins. Centroid position measurements and subpixel sensitivity variations with the MAMA detector. *Applied Optics*, 28(6):1178–1192, 1989.
- [22] H Nobach and E Bodenschatz. Limitations of accuracy in PIV due to individual variations of particle image intensities. *accepted by Experiments in Fluids*.
- [23] H Nobach and E Bodenschatz. Limitations of accuracy in PIV due to individual variations of particle image intensities. In *Proc. 7th Int. Symp. on Particle Image Velocimetry*, Rome, Italy, 2007.
- [24] H Nobach, N Damaschke, and C Tropea. High-precision sub-pixel interpolation in PIV/PTV image processing. In *Proc. 12th Int. Symp. on Appl. of Laser Techn. to Fluid Mechanics*, Lisbon, Portugal, 2004. paper 24.1.
- [25] J Nogueira, A Lecuona, and P A Rodríguez. Local field correction PIV: on the increase of accuracy of digital PIV systems. *Exp. in Fluids*, 27:107–116, 1999.
- [26] J Nogueira, A Lecuona, and P A Rodríguez. Identification of a new source of peak locking, analysis and its removal in conventional and super-resolution PIV techniques. *Exp. in Fluids*, 30:309–316, 2001.
- [27] J Nogueira, A Lecuona, and P A Rodriguez. Limits on the resolution of correlation PIV iterative methods. *Fundamentals. Exp. in Fluids*, 39:305–313, 2005.
- [28] J Nogueira, A Lecuona, P A Rodriguez, J A Alfaro, and A Acosta. Limits on the resolution of correlation PIV iterative methods. Practical implementation and design of weighting functions. *Exp. in Fluids*, 39:314–321, 2005.
- [29] A K Prasad, R J Adrian, C C Landreth, and P W Offutt. Effect of resolution on the speed and accuracy of particle image velocimetry interrogation. *Exp. in Fluids*, 13:105–116, 1992.
- [30] T Roesgen. Optimal subpixel interpolation in particle image velocimetry. *Exp. in Fluids*, 35:252–256, 2003.
- [31] J Rohály, F Frigerio, and D P Hart. Reverse hierarchical PIV processing. *Meas. Sci. Technol.*, 13:984–996, 2002.
- [32] F Scarano. Iterative image deformation methods in PIV. *Meas. Sci. Technol.*, 13:R1–R19, 2002.
- [33] F Scarano. On the stability of iterative PIV image interrogation methods. In *Proc. 12th Int.*

- Symp. on Appl. of Laser Techn. to Fluid Mechanics*, Lisbon, Portugal, 2004. paper 27.2.
- [34] F Scarano and M L Riethmuller. Advances in iterative multigrid PIV image processing. *Exp. in Fluids*, 29:S51–S60, 2000.
- [35] F F J Schrijer and F Scarano. Effect of predictor-corrector filtering on the stability and spatial resolution of iterative PIV interrogation. *Exp. in Fluids*, 45:927–941, 2008.
- [36] M Stanislas, K Okamoto, C J Kähler, J Westerweel, and F Scarano. Main results of the third international PIV challenge. *Exp. in Fluids*, 45:27–71, 2008.
- [37] P T Tokumaru and P E Dimotakis. Image correlation velocimetry. *Exp. in Fluids*, 19:1–15, 1995.
- [38] T Utami, R F Blackwelder, and T Ueno. A cross-correlation technique for velocity field extraction from particulate visualization. *Exp. in Fluids*, 10:213–223, 1991.
- [39] J Westerweel. *Digital Particle Image Velocimetry: Theory and Application*. Delft University Press, Delft, The Netherlands, 1993.
- [40] J Westerweel. Fundamentals of digital particle image velocimetry. *Meas. Sci. Technol.*, 8:1379–1392, 1997.
- [41] J Westerweel. Effect of sensor geometry on the performance of PIV interrogation. In *Proc. 9th Int. Symp. on Appl. of Laser Techn. to Fluid Mechanics*, Lisbon, Portugal, 1998. paper 1.2.
- [42] J M Whittaker. The Fourier theory of the cardinal functions. *Proc. - R. Soc. Edinburgh Sect. A Math.*, 1:169–176, 1929.
- [43] C E Willert and M Gharib. Digital particle image velocimetry. *Exp. in Fluids*, 10:181–193, 1991.