

Untersuchungen zum Einfluss von Gasblasen auf die Ultraschall Doppler Messtechnik mittels optischer und numerischer Methoden

Investigations of the influence of gas bubbles on the Ultrasound Doppler Velocimetry technique using optical and numerical methods

H. Meironke, D. Klembt, T. Panten

Hochschule Stralsund, Zur Schwedenschanze 15, 18435 Stralsund

Ultraschall Doppler Messtechnik, Particle Image Velocimetry, CFD, Zweiphasenströmung
Ultrasound Doppler Velocimetry, Particle Image Velocimetry, CFD, Two-phase flow

Zusammenfassung

Zur Untersuchung des Einflusses von Gasblasen auf die Ultraschall Doppler Messtechnik (UDV) werden die wesentlichen theoretischen Grundlagen aufbereitet und zusammenfassend dargestellt. Weiterhin wird an einem Versuchstand, der speziell für die strömungsmechanische Untersuchung in biologischen Medien konstruiert wurde, eine umfangreiche experimentelle Untersuchung vorgenommen. Vorgestellt werden experimentelle Versuche mit dem UDV und der Particle Image Velocimetry (PIV) sowie der numerischen Simulation mit CFD. Resultierend werden aus den Ergebnissen, Aussagen zum Umgang mit aufsteigenden Blasen getroffen und eine Reduzierung bzw. Vermeidung von Geschwindigkeitsmessfehlern erläutert.

Einleitung

Für die messtechnische Erfassung von Geschwindigkeitsprofilen und -feldern, in biologisch sensiblen Medien hat sich in den letzten Jahren das berührungslose Ultraschall Doppler Verfahren bewährt. Schwierigkeiten bei der Messung von Geschwindigkeiten mit der UDV Messtechnik entstehen, wenn Gasblasen im Medium vorhanden sind. Ursache für das Vorhandensein von Gasblasen können ein in der Flüssigkeit gelöstes Gas und/oder eine biologisch/chemische Reaktion sein. Für eine gezielte wissenschaftliche Erforschung der Prozesse, wird ein detailliertes Geschwindigkeitsmessfeld benötigt. In diesem steigt allerdings die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Geschwindigkeitsmessfehlern durch Gasblasen bzw. unterschiedliche Phasengeschwindigkeiten. Insbesondere in trüben Medien kann später in der Auswertung nur in seltenen Fällen der Einfluss einer aufsteigenden Blase auf das umgebende Fluid ermittelt werden. Mit Hilfe einer reproduzierbaren, methodischen Untersuchung könnte der Einfluss identifiziert und gefiltert werden.

Theoretische Betrachtungen zur Interaktion zweier Phasen (gasförmig/flüssig)

Nachfolgend werden die wichtigsten Charakteristika einer Zweiphasenströmung (Gas/Flüssigkeit) behandelt. Eingegrenzt wird die Untersuchung auf einen Gasblasendurchmesserbereich von $d_B \leq 4$ mm. Dieser entspricht der Größe von Gasblasen, die in biologisch/chemischen Reaktionen entstehen können, wie z.B. bei Gärungsprozessen ($50 \mu\text{m} \leq d_B \leq 2$ mm). Bei der Interaktion von zwei Phasen ist es wichtig, dass die erforderlichen Randbedingungen bekannt

sind, insbesondere die Dichte und Viskosität. Diese sind grundsätzlich abhängig von der Temperatur, sowie dem Druck und beeinflussen sowohl die Aufstiegs­geschwindigkeit als auch Form und Bahn der Gasblase. Zusätzlich sollten auch die Oberflächenspannung und vorhandene Inhaltsstoffe im Fluid (Partikel) beachtet werden, denn diese wirken sich zum Teil stabilisierend auf die Gasphase aus. Die geometrische Form einer Gasblase, kann in Abhängigkeit des Blasendurchmessers in fünf Grundformen eingeteilt werden (siehe Abb. 1).

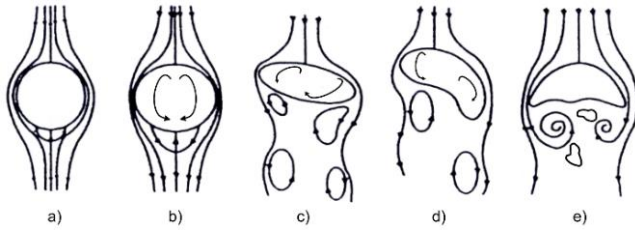


Abb. 1: Aufstiegsverhalten und Form von Gasblasen in einer Flüssigkeit, kombinierte Grafik [3], [5]

Die jeweilige Form der Blase stellt sich abhängig vom Durchmesser und den Spannungsverhältnissen ein. Bei sehr kleinen Blasendurchmessern (a) ähnelt das Verhalten einem Festkörper, dabei ist die Oberflächenspannung dominant und die Viskosität vernachlässigbar. Die Folge ist eine fast perfekte Kugelform. Bei größeren Blasendurchmessern, treten Formen mit bewegter Grenzschicht auf, bei denen in der Blase eine Zirkulationsströmung entsteht (b). Mit weiter ansteigender Größe nimmt auch der Druck auf die Grenzoberfläche zu und beginnt die aufsteigende Blase zu verformen. Die Blasenform ähnelt jetzt einem abgeflachten Rotationsellipsoid (c). Bei weiter zunehmenden Durchmesser und abnehmender Oberflächenspannung verformt sich die Blase stärker und entwickelt sich zur unregelmäßigen Pilzblase (d). In dieser Phase sind Auftriebskräfte und Trägheitskräfte dominant. Steigt der Durchmesser der Blase weiter, entsteht eine Form (e) ähnlich eines Kugelausschnittes.

Bei sehr kleinen Blasendurchmessern (a) ähnelt das Verhalten einem Festkörper, dabei ist die Oberflächenspannung dominant und die Viskosität vernachlässigbar. Die Folge ist eine fast perfekte Kugelform. Bei größeren Blasendurchmessern, treten Formen mit bewegter Grenzschicht auf, bei denen in der Blase eine Zirkulationsströmung entsteht (b). Mit weiter ansteigender Größe nimmt auch der Druck auf die Grenzoberfläche zu und beginnt die aufsteigende Blase zu verformen. Die Blasenform ähnelt jetzt einem abgeflachten Rotationsellipsoid (c). Bei weiter zunehmenden Durchmesser und abnehmender Oberflächenspannung verformt sich die Blase stärker und entwickelt sich zur unregelmäßigen Pilzblase (d). In dieser Phase sind Auftriebskräfte und Trägheitskräfte dominant. Steigt der Durchmesser der Blase weiter, entsteht eine Form (e) ähnlich eines Kugelausschnittes.

Die Aufstiegs­geschwindigkeit wird hauptsächlich von der Größe der Blase und den Stoffeigenschaften der Flüssigkeit beeinflusst und ist im Allgemeinen nach einer bestimmten Zeit stationär. Die Abb. 2 stellt Messungen zur Aufstiegs­geschwindigkeit bei verschiedenen Blasendurchmessern in Wasser und Glycerin dar und konnte durch entsprechende Literatur bestätigt werden [2]. Zu erkennen ist, dass die maximale Aufstiegs­geschwindigkeit bei einem Blasendurchmesser von ca. $2\text{ mm} < d_B < 3\text{ mm}$ zu erwarten ist. Danach findet ein Abfall der Geschwindigkeit statt, gefolgt von einem allmählichen Wiederanstieg. Die Aufstiegs­geschwindigkeiten in Glycerin sind im Vergleich zu Wasser, bei kleinen Durchmessern geringer, bei großen Durchmessern höher und es fehlt ein ausgeprägter Peak der maximalen Geschwindigkeit.

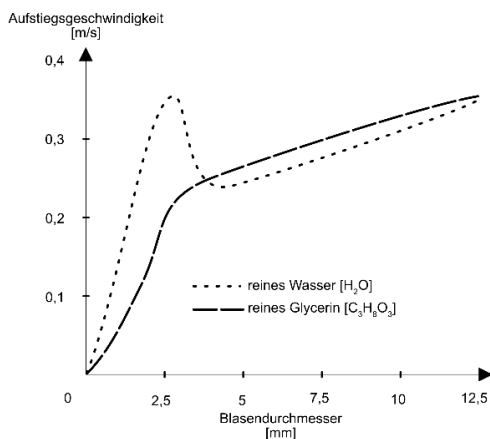


Abb. 2: Aufstiegs­geschwindigkeiten von Gasblasen in Wasser und Glycerin, eigene Untersuchungen

Zu erkennen ist, dass die maximale Aufstiegs­geschwindigkeit bei einem Blasendurchmesser von ca. $2\text{ mm} < d_B < 3\text{ mm}$ zu erwarten ist. Danach findet ein Abfall der Geschwindigkeit statt, gefolgt von einem allmählichen Wiederanstieg. Die Aufstiegs­geschwindigkeiten in Glycerin sind im Vergleich zu Wasser, bei kleinen Durchmessern geringer, bei großen Durchmessern höher und es fehlt ein ausgeprägter Peak der maximalen Geschwindigkeit.

Untersuchungen zu aufsteigenden Gasblasen zeigen, dass Blasen mit einem volumenäquivalenten Durchmesser von $d_B \leq 1,0\text{ mm}$, gerade oder zickzackförmige Blasenbahnen haben [1, 6, 7]. Dagegen stellen sich bei $d_B > 1,0\text{ mm}$ instationäre Zickzack- oder Spiralbahnen ein. Untersuchungen von Pahl & Özkurt [3] sowie eigene Untersuchungen ergeben, dass Blasen sogar bis zu einem Äquivalentdurchmesser von 1,3 mm gerade aufsteigen, wenn diese durch oberflächenaktive Substanzen stabilisiert werden.

Grundlagen der UDV Messtechnik

Die Ultraschall Doppler Messtechnik ist ein akustisches Strömungsmesssystem, welches nicht-invasiv Strömungsfelder erfassen kann. Mit Hilfe dieses Messverfahrens besteht die

Möglichkeit instationäre Geschwindigkeitsprofile in einer Strömung entlang der Strahlachse zu messen. Ermöglicht wird dies durch die Messung und anschließende Auswertung der Doppelfrequenzen als Funktion der Zeit. Sofort nach dem Aussenden eines definierten Ultraschall-Pulses, schaltet der Transducer auf Empfang und wartet auf das reflektierte, frequenzverschobene Antwortsignal, welches die Sonde nach einer definierten Zeit (t) erreicht (siehe Gl.(1)).

$$t = \frac{2 \cdot x}{a} \quad [\text{s}] \quad (1)$$

$$f_D = \frac{2 \cdot f_0 \cdot v}{a} \quad [\text{Hz}] \quad (2)$$

Bei der Auswertung des Antwortsignales wird dann die Laufzeit des Pulses und die ortsaufgelöste Dopplerfrequenz (f_D) berücksichtigt. Geschwindigkeitsinformationen von Partikeln die weiter entfernt auf der Strahlachse liegen, werden entsprechend später vom Transducer aufgenommen und folglich einem entfernteren Messvolumen auf der Strahlachse zugeordnet. Aus den jeweiligen Dopplerfrequenzen und der Differenz zwischen Sende- und Empfangsfrequenz des Ultraschallsignals kann dann die mittlere Strömungsgeschwindigkeit (v) errechnet werden (siehe Gl. (2)). Bei dem verwendeten System sind insgesamt 128 Messvolumen innerhalb eines elektronischen Fensters auf der Strahlachse angeordnet. Bei der Auswertung kann dann jedem Messvolumen eine mittlere Geschwindigkeit zugeordnet werden. Eine vereinfachte Darstellung der Strahlcharakteristik, der Messvolumen- und der Messfensterdimensionen ist in Abb. 3 dargestellt. Der Bereich direkt nach dem Transducer wird als Fresnel-Zone bzw. Nahfeld bezeichnet, in dem keine Messungen möglich sind. In der anschließenden Fraunhofer-Zone weitet sich das Messfeld mit einem definierten Winkel auf. Bei einer konstanten Schallgeschwindigkeit (a) und Ultraschallfrequenz (f_0) der Transducer, ist auch das Produkt aus der maximalen Eindringtiefe und der maximal messbaren Geschwindigkeit konstant. Das heißt, je höher die maximale Eindringtiefe, desto geringer ist die maximal messbare Geschwindigkeit.

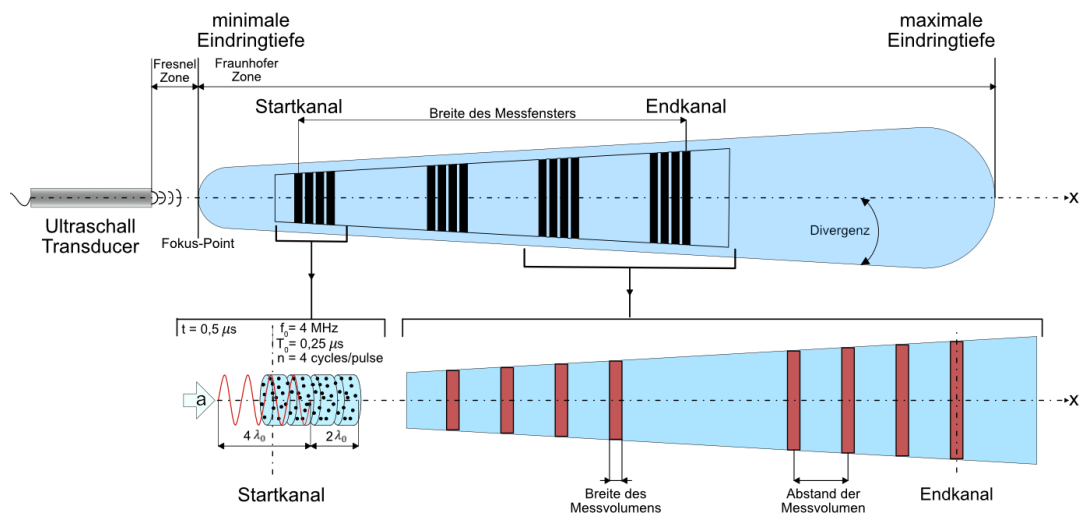


Abb. 3: Schematische Darstellung der Strahlcharakteristik, der Messvolumen und der Messfensterdimensionen eines Transducers

Versuchsaufbau

Für die qualitative Beschreibung des Einflusses von Gasblasen auf das UDV Messsystem wurde ein entsprechend modularer Versuchsaufbau entwickelt (siehe Abb. 4). Kernstück des Versuchsaufbaus ist ein 1 m hoher gläserner Behälter mit quadratischer Grundform, mit einer Größe von ca. 200 x 200 mm. Im Boden dieser Blasensäule ist mittig eine Öffnung eingebracht, in dem die Kapillaren mit verschiedenen Innendurchmessern installiert werden. Die Stahl-Kapillaren weisen einen Öffnungsdurchmesser von $d_{K1} = 0,86$ mm und $d_{K2} = 1,55$ mm auf. Die Generierung der Blasen wird mit Hilfe einer Spritzenpumpe (Volumenstrom

$d_{K1} = 12 \text{ ml/h}$, $d_{K2} = 38,9 \text{ ml/h}$) vorgenommen. Die Visualisierung des Strömungsbildes um die Gasblase erfolgt durch eine zweidimensionale Messung mit einem PIV System. Das verwendete System hat eine maximale Pulsenergie von 200 mJ und arbeitet bei einer Taktfrequenz von 7,25 Hz für die Generierung des Lichtschnittes. Damit Aufnahmen an der Kapillare (Ablösung der Blase) und an den Transducern stattfinden können, wurde das PIV System auf eine Linearverfahreinrichtung montiert. Für eine detaillierte Auflösung der Geschwindigkeitsfelder, auch an der Phasengrenze der Gasblase, werden fluoreszierende Partikel ($\rho = 1,05 \text{ g/cm}^3$, $d_p = 1 \mu\text{m}$) verwendet. Die Aufnahme der Strömungspartikel erfolgt anschließend mit einer Kreuzkorrelations-CCD-Kamera, mit einer Bildwiederholungsfrequenz von 15 Hz, bei einer Auflösung von 2000 x 2000 Pixeln. Durch einen speziellen Interferenzfilter wird nur das Streulicht der Partikel von der Kamera erfasst. Zusätzlich kann durch verschiedene Objektive die Gasblase in einem Nahfeld (3 x 3 mm) und in einem Fernfeld (10 x 10 mm) aufgenommen werden. Die UDV Geschwindigkeitsmesstechnik befindet sich im oberen Teil der Blasensäule und wird realisiert durch zwei 2 MHz Transducer im Lot zu den Kapillaren. Gestartet wird die UDV Messung mit Hilfe des Synchronizers vom PIV System, dadurch kann eine zeitlich synchronisierte Messung beider Systeme realisiert werden.

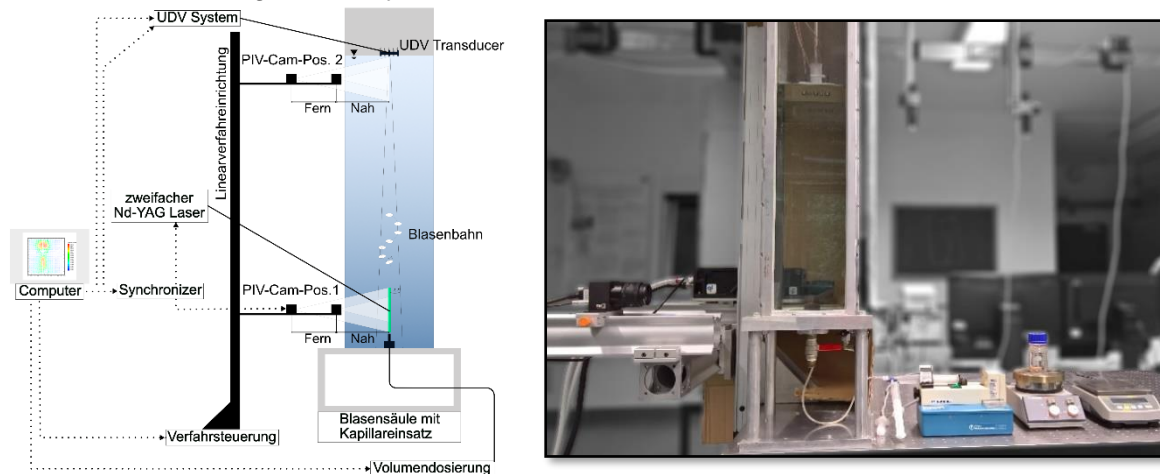


Abb. 4: Schematischer und realer Versuchsaufbau mit akustischer und optischer Messtechnik

Die Tab. 1 zeigt die strömungsmechanischen Kennwerte der experimentell untersuchten Medien. Die Schallgeschwindigkeiten (a) des Wassers und des Glycerin/Wasser-Gemisches wurden experimentell durch ein Laufzeitenverfahren ermittelt (1 bar; 22,5°C).

Kennwerte:	60% $\text{C}_3\text{H}_8\text{O}_3/\text{H}_2\text{O}$:		H_2O :	
	d_{K1}	d_{K2}	d_{K1}	d_{K2}
Dichte [kg/m^3]	$\rho = 1,00 \cdot 10^3$		$\rho = 1,157 \cdot 10^3$	
Dynamische Viskosität [$\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$]	$\eta = 1,13 \cdot 10^{-6}$		$\eta = 15,40 \cdot 10^{-6}$	
Schallgeschwindigkeit [m/s]	$a = 1478$		$a = 1819$	
\varnothing -Blasenäquivalentdurchmesser [mm]	2,4	3	2,5	4
\varnothing -Geschwindigkeiten der Blasen [m/s]	0,20	0,22	0,33	0,32
Reynolds-Zahl [-]:	44,67	61,42	825	1280
Prandtl-Zahl [-]:	96,8	96,8	7,14	7,14
Weber-Zahl [-]:	1,68	2,55	3,74	5,63
Morton-Zahl [-]:	$7,05 \cdot 10^{-07}$	$7,05 \cdot 10^{-07}$	$2,54 \cdot 10^{-11}$	$2,54 \cdot 10^{-11}$

Tab. 1: Kennwerte im Bereich des geraden stationären Aufstiegs

Ergebnisse und Diskussion

Geschwindigkeitsfelder in 60%igem Glycerin/Wasser-Gemisch mittels PIV und UDV

Aus vorherigen Experimenten zum Blasenauftiegsverhalten ist bekannt, dass nachdem sich die Blase von der Kapillare abgelöst hat, diese gerade, kurz instationär beschleunigt aufsteigt

und eine rotationssymmetrische Form hat [4]. Einen großen Unterschied im Vergleich zu reinem Wasser, stellt die höhere Viskosität dar. Diese wirkt sich dämpfend auf die Blasenoberfläche aus und die Blasenform bleibt annähernd rotationssymmetrisch. Die Ergebnisse der PIV Aufnahme im Vergleich zu der Geschwindigkeitsmessung des UDV Systems sind, exemplarisch an Kapillare 1 in Abb. 5 (Aufnahme direkt unterhalb des Transducer) und in Abb. 6 (Aufnahme oberhalb der Kapillare) abgebildet.

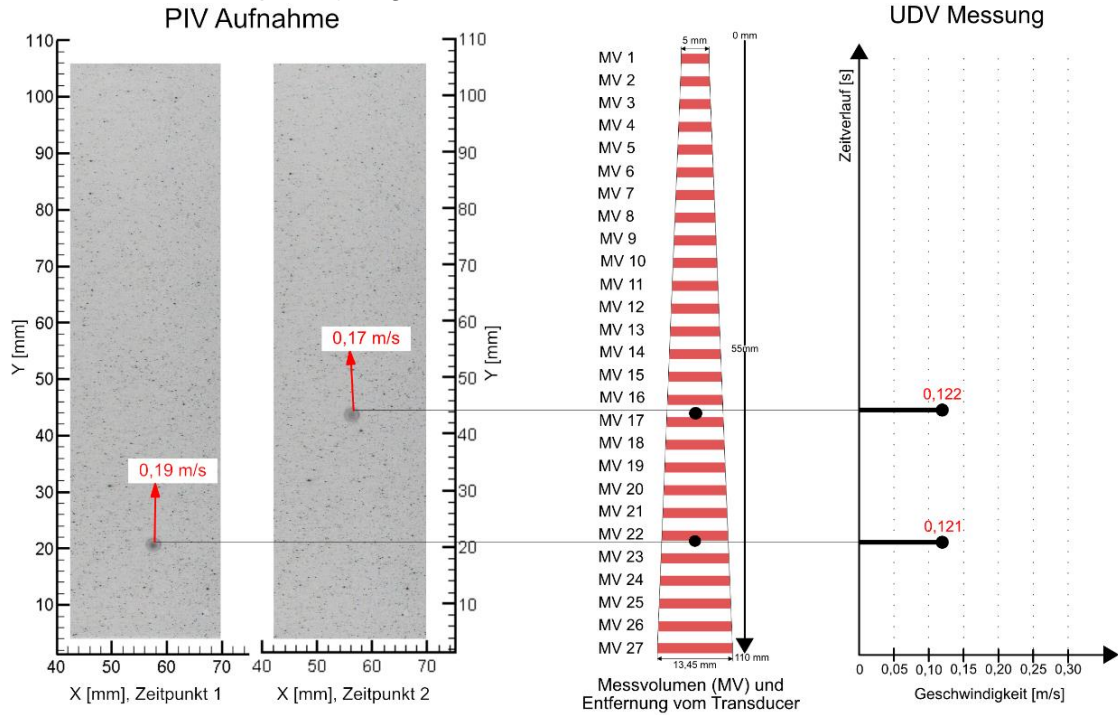


Abb. 5: Vergleich der PIV Messung (60%iges Glycerin/Wasser-Gemisch, Kapillare d_{K1} , Cam-Pos.2, Fern) mit den betroffenen Messvolumen und der Geschwindigkeitsmessung des UDV Systems

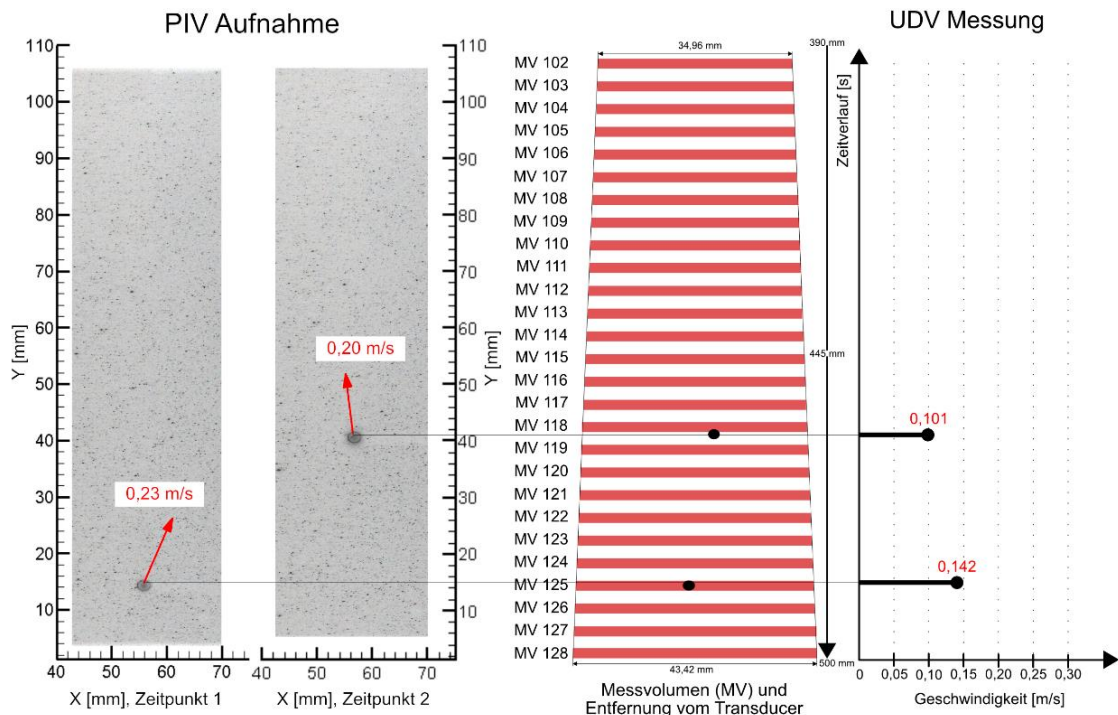


Abb. 6: Vergleich der PIV Messung (60%iges Glycerin/Wasser-Gemisch, Kapillare d_{K1} , Cam-Pos.1, Fern) mit den betroffenen Messvolumen und der Geschwindigkeitsmessung des UDV Systems

Geschwindigkeitsfelder in Wasser mittels PIV und UDV

Aufgrund der niedrigeren Viskosität von Wasser, ist der gerade Aufstieg sehr kurz und wird schnell zu einer Pendelbewegung. Dabei verformt sich die Blase und verliert ihre Rotations-symmetrie. Die Abb. 7 vergleicht die PIV Aufnahme mit der UDV Messung in reinem Wasser.

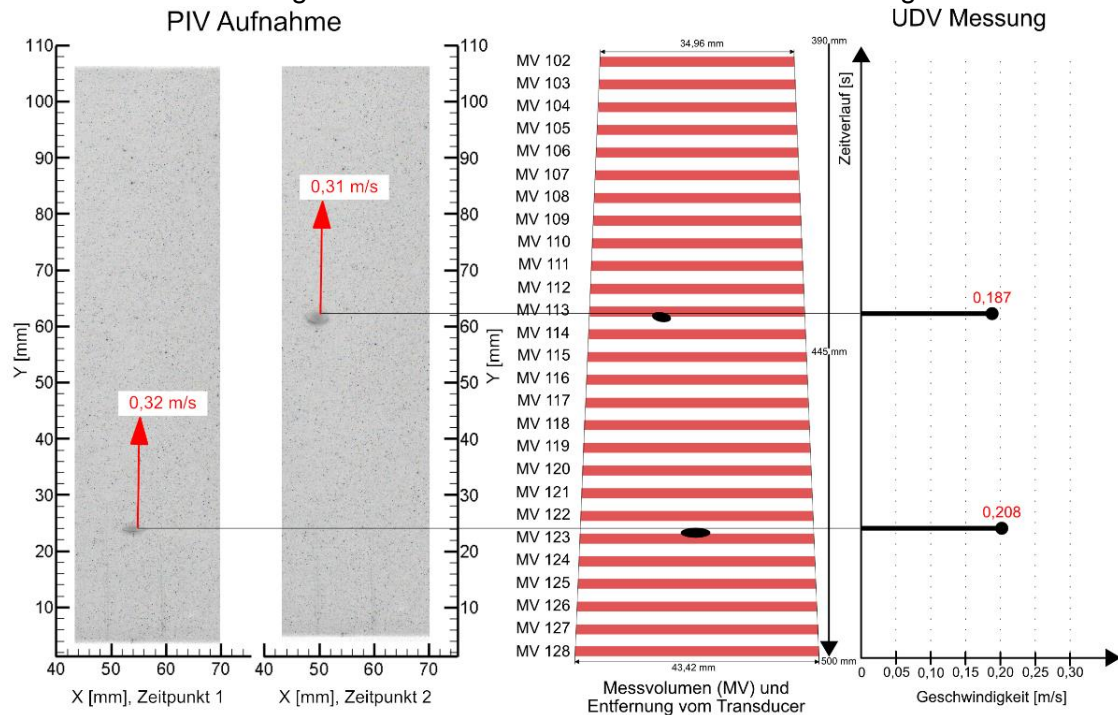


Abb. 7: Vergleich der PIV Messung (Wasser, Kapillare d_{K2} , Cam-Pos. 1, Fern) mit den betroffenen Messvolumen und der Geschwindigkeitsmessung des UDV Systems

Auswertung des PIV/UDV-Vergleichs

Ausgehend von den experimentellen Ergebnissen können mehrere Auswirkungen einer Gasblase auf die UDV-Messtechnik festgehalten werden. Dargestellt sind jeweils zwei Zeitpunkte mit der PIV Messtechnik und die ermittelte Geschwindigkeit in dem betreffenden Messvolumen des UDV Systems. Erwartungsgemäß wird die Gasblase erst messtechnisch erfasst, wenn diese sich in einem Messvolumen befindet. Sobald die Blase im ersten Messvolumen detektiert wurde, kann mit Hilfe der UDV Messtechnik eine ungefähre Abschätzung der Blasengröße erfolgen. Ein wichtiges Kriterium ist der definierte Abstand zwischen den Messvolumen und der Breite eines Messvolumens. Hat die Gasblase einen geringeren Durchmesser als der Abstand zwischen den Messvolumen, wird die Gasblase beim Aufstieg von jedem Messvolumen nacheinander detektiert. Sollte die Gasblase größer sein als der Abstand zwischen den Messvolumen, wird sie in mehreren Messvolumen detektiert. Vorausgesetzt die Gasblase steigt geradlinig auf, wie in Flüssigkeiten mit einer hohen Viskosität (Glycerin). Grundsätzlich besitzen Messungen mit dem UDV System im oberen Viertel der maximal messbaren Tiefe eine bessere räumliche Auflösung. Denn je weiter die Geschwindigkeitsmessung auf der Strahlachse in Entfernung zum Transducer vorgenommen wird, desto größer ist das systembedingte Messvolumen (Divergenz der Ultraschall-Welle). Als Folge der Mittelung über das Messvolumen ist die Blasenauftiebsgeschwindigkeit deutlich geringer als die der PIV Auswertung. Wenn das Messvolumen doppelt so groß ist, wie die Gasblase (bei einem sonst ruhenden Fluid), würde die Mittelung die Hälfte der Blasenauftiebsgeschwindigkeit ergeben. Deshalb kann die Aufstiegs geschwindigkeit nur in Messvolumen mit ähnlichem Durchmesser wie die Blase gemessen werden, was aber zu einer Abschätzung anderer Messvolumen führen kann. Dabei wird die Aufstiegs geschwindigkeit der Blase nicht nur im entsprechenden Messvolumen ermittelt, sondern zeitgleich in allen anderen Messvolumen. Dieser Fehler kann durch eine

Programmlogik gefiltert werden. Ein weiterer entscheidender Einfluss der Divergenz entsteht, wenn eine Gasblase entlang einer Zickzackbahn oder Spiraltrajektorie verläuft. Dieser Verlauf kann zur Folge haben, dass die Gasblase von den größeren Messvolumen aufgezeichnet und von den kleineren Messvolumen nicht mehr erfasst wird. Diese kurzen Geschwindigkeitspeaks, könnten mit Hilfe eines weiteren Filters in den Messdaten behoben werden. Auch ein speziell auf das UDV System angepasster Ultraschall-Filter, ähnlich einer Blende, könnte die Strahlachse bündeln. Ein Problem, das nicht durch eine Programmlogik gelöst werden kann ist, wenn sich Gasblasen nach ihrem Aufstieg dauerhaft vor der oszillierenden Membran des Transducer befinden. Das führt zu einem dauerhaften Phasenübergang bei der Schallwelle und beeinträchtigt die gesamte nachfolgende Messung. Dieses Problem lässt sich konstruktiv lösen oder benötigt eine kurze Querströmung mit einer Flüssigkeit. Wird die Anströmung zeitgesteuert, kann diese später aus den Messdaten der UDV Technik gefiltert werden.

Geschwindigkeitsfeld mittels numerischer Simulation

Die numerische Simulation ermöglicht es aufbauend auf den Daten aus den Experimenten, Randbedingungen im gewissen Rahmen zu variieren, ohne weiteren experimentellen Aufwand zu verursachen und kann damit helfen die UDV Messungen besser zu bewerten. Nachfolgend soll ein kurzer Überblick über die verwendeten Randbedingungen und mathematischen Modelle/Methoden der Simulation gegeben werden. In diesem Fall wurde die Simulation ausgehend von einer existierenden Gasblase erstellt. Die Simulation selbst beruht auf der „Volume of Fluid“-Methode mit entsprechend ausgewählten Modellen für die Berücksichtigung der Oberflächenspannung und Gravitation, sowie Geo-reconstruct für eine definierte Darstellung der Phasengrenze. Zur Modellierung der turbulenten Schwankungsbewegungen wurde das k- Ω -SST-Turbulenzmodell verwendet. In Abb. 8 ist die PIV Aufnahme mit dem Ergebnis der numerischen Simulation Abb. 9 gegenübergestellt. Im direkten Vergleich beider Abbildungen fällt auf, dass die Geschwindigkeitsfelder annähernd gleich dargestellt sind. Die Wirbelstrukturen bei der numerischen Simulation sind allerdings wesentlich stärker ausgeprägt. Auch das umliegende Fluid weist geringfügig höhere Geschwindigkeiten als die PIV Aufnahme auf. Eine zukünftige Weiterentwicklung der Simulation wird die Veränderung zu einem strukturierten Netz und verändertem Turbulenzmodell sein.

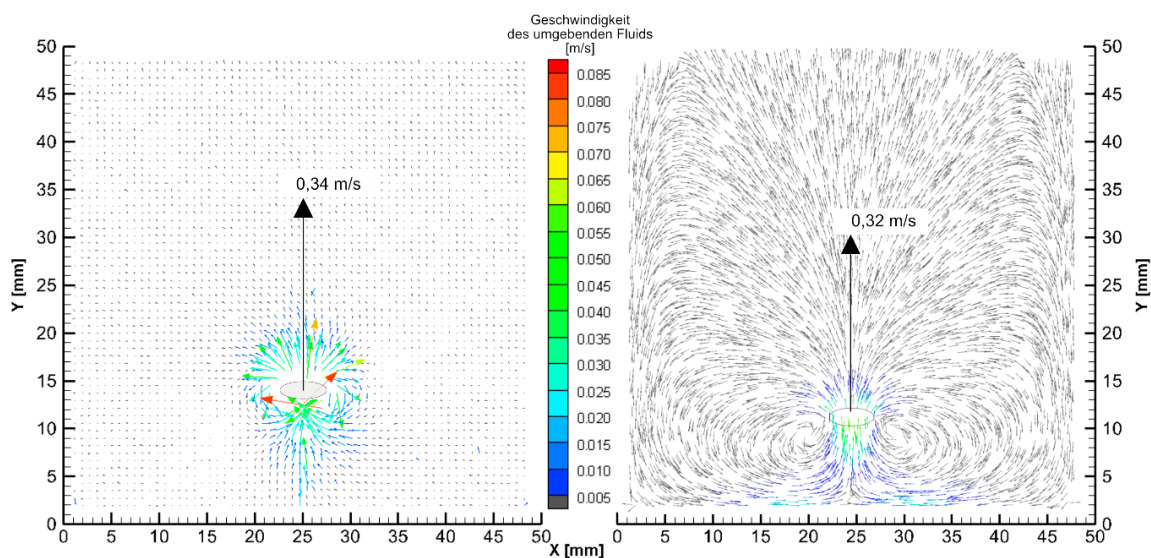


Abb. 8: Aufstieg einer Gasblase (Wasser, Kapillare d_{K2} , Cam-Pos.1, Nah)

Abb. 9: Numerische Simulation, einer aufsteigenden Gasblase im Wasser mit Ansys-Fluent

Zusammenfassung der Messergebnisse aller verwendeten Systeme

Die Abb. 10 stellt eine Übersicht der experimentellen und numerischen Messergebnisse dar.

Wie erwartet sind die Geschwindigkeiten von dem Glycerin/Wasser-Gemisch geringer als in reinem Wasser. Als Folge der Mittelung vom UDV System wird weiterhin deutlich, dass die Geschwindigkeitsergebnisse viel geringer ausfallen, als die des PIV Systems und der numerischen Simulation. Der nächste Schritt ist die Entwicklung einer speziellen Logik, für die Filtrung oder richtige Darstellung einer Blasenaufstiegsgeschwindigkeit.

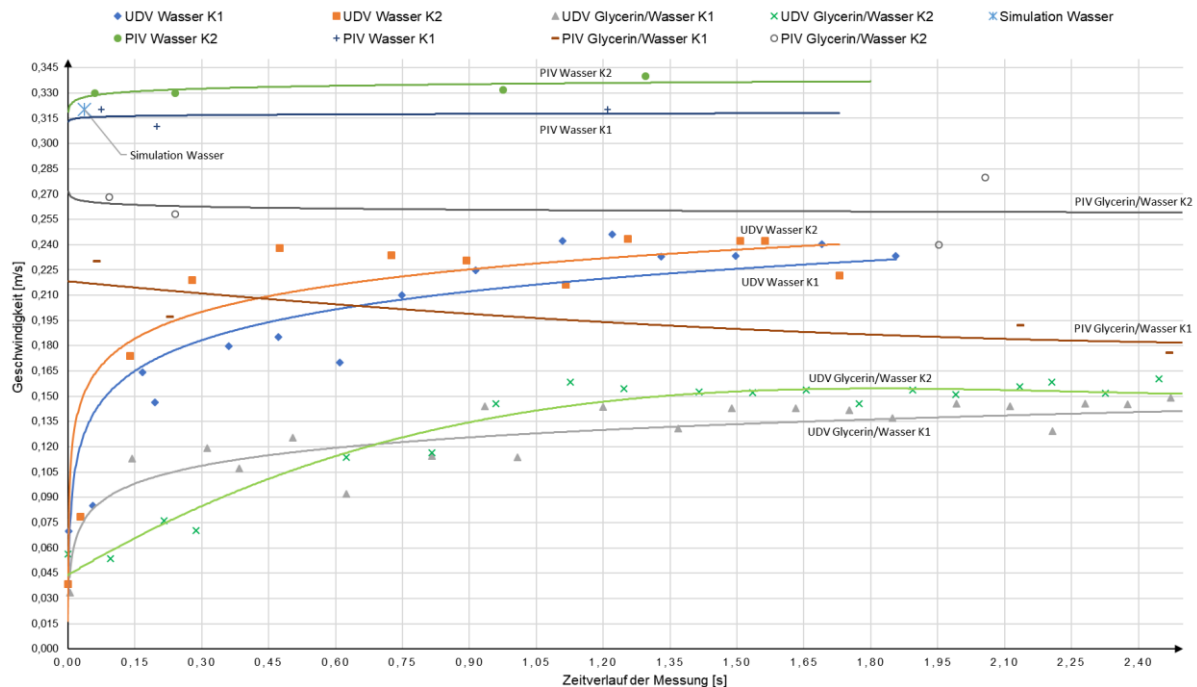


Abb. 10: Vergleich der Aufstiegsgeschwindigkeiten von ausgewählten Messvolumen der UDV Technik, der PIV Messungen und dem Ergebnis der numerischen Simulation im zeitlichen Verlauf bei verschiedenen Medien und Kapillardurchmessern (d_{K1} , d_{K2})

Danksagung

Die Autoren bedanken sich für die Förderung durch EFRE-Mittel für die UDV Messtechnik (GHS-15-0050) und DFG-Mittel für die PIV Messtechnik (GZ: INST 295/32-1 LAGG).

Literatur

- [1] F. N. Peebles und H. J. Garber, Studies on the motion of gas bubbles in liquids, Bd. Vol. 49, Chemical Engineering Progress, 1953, pp. 88-97.
- [2] D. W. v. Krevelen und P. J. Hoftijzer, Chem. Eng. Prog. 46, 1950, pp. 29-35.
- [3] M. H. Pahl und M. Özkurt, Aufstiegsverhalten von CO₂-Blasen unter verschiedenen Betriebsbedingungen, Paderborn: Monatsschrift für Brauwissenschaft, 1998.
- [4] H. Meironke, J. A. Szymczyk: Untersuchung des Geschwindigkeitsfeldes einer aufsteigenden Gasblase mit einer schwingenden Phasengrenze mittels Particle Image Velocimetry, A. Delgado, F. Werner, B. Ruck, A. Leder, D. Dopheide, (Hrsg.), Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik - 8. Fachtagung der GALA e.V., Freising, 2000, p. 26.1-26.6
- [5] P. Grassmann, Physikalische Grundlagen der Chemie-Ingenieur-Technik, Frankfurt am Main: Sauerländer Verlag, 1961.
- [6] P. G. Saffman, On the rise of small air bubbles in water, Journal of Fluid Mechanics, 1956, p. 249–275.
- [7] H. Braeske und G. Brenn, Experimentelle Grundlagenuntersuchung zur Strömungsmechanik in Blasensäulen. Zwischenbericht, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Universität Erlangen- Nürnberg, 1996.