

Messunsicherheit der Geschwindigkeitsdarstellung zur LDA-Kalibrierung mit normierten Streuteilchen

Measurement uncertainty of the realisation of velocity for the calibration of LDA with normalized scattering particles

V. Strunck, N. Pape, M. Eggert, T. Weimann, H. Müller

Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB)
Bundesallee 100, 38116 Braunschweig

LDA-Kalibrierung, rotierende Scheibe, Differenzenverfahren, Lithographie, Unsicherheit
LDA-calibration, rotating disk, difference method, lithographic print, uncertainty

Zusammenfassung

Ein neues Laser-Doppler-Anemometer Kalibrierverfahren mit einer rotierenden Glasscheibe wird im Rahmen einer Unsicherheitsanalyse untersucht. Während das Standard-LDA-Kalibrierverfahren die Mantelfläche eines Glaszylinders zur Darstellung der Geschwindigkeit nutzt, wird bei der neuen Differenzenmethode ein auf der Seitenfläche aufgebracht Glas-träger mit einer Matrix aus lithographisch gedruckten Streuteilchen verwendet, siehe Strunck et al. 2012. Dadurch können mit dem hier betrachteten Verfahren auch LDAs mit Vorwärtsstreu-Betrieb kalibriert werden (PDA, Referenz-Streustrahl-LDA).

Um die Abweichung des Mittelwertes des Streifenabstands zu verringern, wird mit einer Gruppe von Streuteilchen der Streifenabstand des LDAs und seine Messunsicherheit bestimmt.

Die verschiedenen Quellen der Unsicherheit mit ihren sowohl statischen als auch dynamischen Eigenschaften werden in einem Unsicherheitsbudget aufgeführt. Insgesamt ergibt sich für die Kalibrierung mit den normierten Streuteilchen eine erweiterte Unsicherheit von geringer als 0,1%.

Einleitung

Lithographisch gedruckte metallische Streuteilchen haben durch den Beschichtungsprozess eine Höhe von etwa 100 nm und sind vornehmlich eben. Streulicht wird lediglich durch Beugung erzeugt, welches von dem zu untersuchenden LDA empfangen werden kann. Über eine Feinstrukturierung der Streuteilchen lässt sich eine Verstärkung des Streulichtes erreichen. Um kleine Beugungswinkel bei Transmission oder Reflektion zu erhalten, müssen periodische Strukturen vermieden werden, da sie das Licht zu stark beugen würden. Der Siemensstern, siehe Abb. 1 links, hat eine radialsymmetrische Feinstruktur mit guter Streueigenschaft. Der (rote) Kreis in dem Beugungsbild des Streuteilchens (rechts) zeigt den Streuwinkel des halben Winkels eines Kreuzstrahl-LDAs mit einem Streifenabstand vom Durchmesser des Streuteilchens an. Daher beugt er ausreichend Licht in die Mitte der Empfangsoptik.

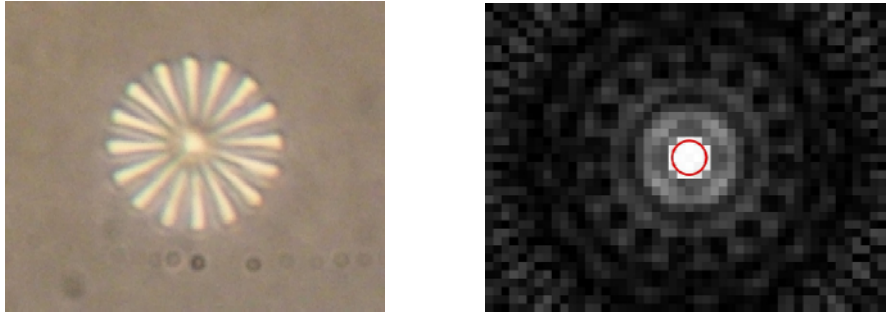


Abb. 1: Lithographisch gedruckter Siemensstern (\varnothing 10 μm) und Beugungsbild

Siemenssterne von 5 μm Durchmesser werden auf einen ebenen Glasträger im Rastermaß von 2 mm gedruckt, so dass jeweils der Abstand zweier Streuteilchen zueinander für eine Differenzen-Kalibrierungsmethode genutzt werden kann. Der Glasträger wird auf der Seitenfläche eines Glaszylinders angebracht. Aus der Rotationsgeschwindigkeit ω , dem vorgegebenen Abstand zweier Streupartikel Δr und der Differenz Δf_D der mit dem LDA gemessenen Doppler-Frequenzen kann der Streifenabstand d berechnet werden:

$$d = \omega \frac{\Delta r}{\Delta f_D} \quad (1)$$

Versuchsaufbau

Eine ausführliche Beschreibung des Aufbaus der rotierenden Scheibe findet sich bei Strunck et al 2010. Der Schrittmotor für die Bewegung der Scheibe wird von einem Mikroprozessor quatzgenau angesteuert. Die Auflösung des inkrementalen Drehgebers mit 1000 Signalperioden pro Umdrehung wird im dynamischen Betrieb mittels des Mikroprozessors auf 65536 Perioden interpoliert, wobei eine ausgewählte Periode als Auslöseereignis für die Datenaufnahme dient. Das LDA-Messvolumen wird mit dem LDA vertikal oberhalb der Scheibenachse mit einem 3-Komponenten-Verschiebegerät und einer Auflösung von 10 μm bewegt.

Fehlerquellen

In Analogie zu den bei Strunck et al 2010 aufgeführten Winkelfehlern gibt es auf der Seitenfläche der rotierenden Scheibe einen Nickwinkelfehler, der hier jedoch keinen Einfluss auf die Dopplerdifferenzfrequenz hat, und einen Gierwinkelfehler α , siehe Abb. 2., der zu einem Kosinusfehler führt. Da die Glasscheibe reflektierend wirkt, kann das Verschiebegerät so verfahren werden, dass die reflektierten Laserstrahlen auf der Halterung der Sendelinse erscheinen und deren Symmetrie und Höhenlage optimiert werden.

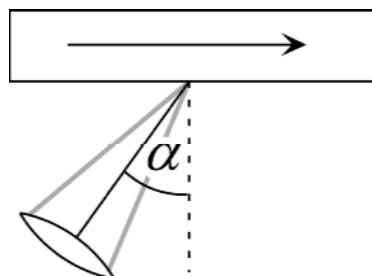


Abb. 2: Gierwinkelfehler α

Eine weitere Unsicherheit ergibt sich aus der Lage der Streuteilchenmatrix auf der rotierenden Glasscheibe. Bei dem Klebprozess des Objektträgers wurde versucht, eine der Partikelreihen entlang des Radius zu orientieren. Durch die Messung vieler Partikelpositionen kann die Lage bis auf einen Restwinkelfehler β bestimmt werden.

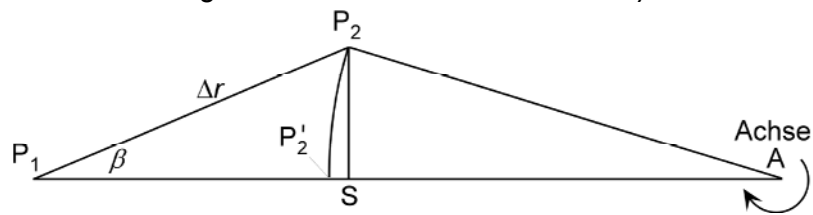


Abb. 3: Lagefehler des Objektträgers

Liegt das erste Streuteilchen P_1 auf dem Scheibenradius, siehe Abb. 3, so erscheint der Abstand Δr nach Drehung der Scheibe und damit des Streuteilchens P_2 auf denselben Radius bei P_2' verkürzt:

$$\begin{aligned} \overline{P_2 S} &= \Delta r \sin \beta = \overline{P_1 S} \tan \beta \\ \overline{P_2 A}^2 &= (\overline{P_1 A} - \overline{P_1 S})^2 + \overline{P_2 S}^2 = \overline{P_1 A}^2 - 2\Delta r \cos \beta \cdot \overline{P_1 A} + \Delta r^2 \\ \overline{P_2 A} &\approx \overline{P_1 A} - \Delta r \cos \beta, \quad \beta \ll 1 \\ \overline{P_1 A} - \overline{P_2 A} &= \overline{P_2' A} = \Delta r \cos \beta \end{aligned} \quad (2)$$

Der Lagewinkelfehler ist daher auch ein Kosinusfehler. Aus praktische Gründen werden für die Kosinusfehler α und β die Fehler $\delta_1 = 1 - \cos \alpha$ und $\delta_2 = 1 - \cos \beta$ eingeführt. Weil α und β klein sind, gilt nach der Reihenentwicklung: $\delta_1 \approx \alpha^2/2$ und $\delta_2 \approx \beta^2/2$. Eine weitere Fehlerquelle erhält man, wenn die Bewegung des Verschiebegerätes zum vertikalen Scheibenradius um den Abstand x versetzt erfolgt.

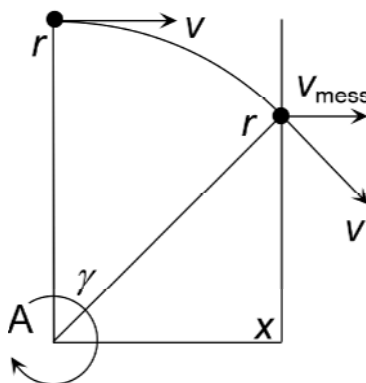


Abb. 4: Verschiebungsfehler

Der Versatz in Abb. 4 erzeugt für die gemessene Geschwindigkeit und damit auch für die Frequenz einen Kosinusfehler mit dem Winkel γ . Für die Differenzfrequenz zweier Teilchen erhält man:

$$\begin{aligned} f \cdot d = v &= v_{\text{mess}} / \cos \gamma = \frac{v_{\text{mess}}}{1 - \frac{x^2}{2r^2}} \approx v_{\text{mess}} \left(1 + \frac{x^2}{2r^2} \right) \\ \Delta f &= f_{2\text{mess}} \left(1 + \frac{x^2}{2r_2^2} \right) - f_{1\text{mess}} \left(1 + \frac{x^2}{2r_1^2} \right) = \Delta f_{\text{mess}} \cdot k_{21} \end{aligned} \quad (3)$$

Mit Berücksichtigung des kleineren der beiden Radien r_1 und r_2 ergibt sich eine obere Grenze für den Faktor k_{21} :

$$k_{21} \leq 1 + \frac{x^2}{2r_{\min}^2} \approx 1 / \left(1 - \frac{x^2}{2r_{\min}^2} \right) = 1 / (1 - \delta_3), \quad r_{\min} = \min(r_1, r_2), \quad \delta_3 = \frac{x^2}{2r_{\min}^2} \quad (4)$$

Für den Streifenabstand d mit allen zuvor aufgeführten Korrekturfaktoren ergibt sich

$$d = \omega \frac{\Delta r}{\Delta f} (1 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3) \quad (5)$$

Unsicherheitsanalyse

Die kombinierte relative Unsicherheit u_c des Streifenabstands d ist

$$u_c^2(d)/d^2 = c_\omega^2 u^2(\omega) + c_{\Delta r}^2 u^2(\Delta r) + c_{\Delta f}^2 u^2(\Delta f) + c_{\delta_1}^2 u^2(\delta_1) + c_{\delta_2}^2 u^2(\delta_2) + c_{\delta_3}^2 u^2(\delta_3) \quad (6)$$

mit den Sensitivitätskoeffizienten

$$c_{\Delta r} = \frac{\partial d}{\partial r} \cdot \frac{1}{d} \approx \frac{\omega}{\Delta f_D} (1 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3) \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{\Delta r} \quad (7a)$$

$$c_\omega = \frac{\partial d}{\partial \omega} \cdot \frac{1}{d} \approx \frac{\Delta r}{\Delta f_D} (1 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3) \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{\omega} \quad (7b)$$

$$c_{\Delta f_D} = \frac{\partial d}{\partial \Delta f_D} \cdot \frac{1}{d} \approx -\frac{r \cdot \omega}{\Delta f_D^2} (1 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3) \cdot \frac{1}{d} = -\frac{1}{\Delta f_D} \quad (7c)$$

$$c_{\delta_1, \delta_2, \delta_3} = \frac{\partial d}{\partial \delta_{1,2,3}} \cdot \frac{1}{d} \approx -\frac{\Delta r \cdot \omega}{\Delta f_D} \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{(1 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3)} \quad (7d)$$

Mit Einführung von $K = 1 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3$ und mit Berücksichtigung der Sensitivitätskoeffizienten ergibt sich für die kombinierte relative Unsicherheit

$$\left(\frac{u_c(d)}{d} \right)^2 = \left(\frac{u(\omega)}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{u(\Delta r)}{\Delta r} \right)^2 + \left(\frac{u(\Delta f_D)}{\Delta f_D} \right)^2 + \frac{u(\delta_1)^2}{K^2} + \frac{u(\delta_2)^2}{K^2} + \frac{u(\delta_3)^2}{K^2}. \quad (8)$$

Im Folgenden werden die Fehler und daraus folgende Unsicherheiten untersucht.

δ_1 : Gierwinkelfehler

Für ein LDA mit einer typischen Brennweite von $L = 300$ mm und der Ausrichtung der gespiegelten Laserstrahlen kann eine Symmetrie von $A_{\text{sym}} = \pm 0,5$ mm erzielt werden. Der Winkel α beträgt hierbei

$$\alpha = \arctan(A_{\text{sym}}/L) \approx A_{\text{sym}}/L = \pm 0,00165. \quad (9)$$

Der Kosinus-Fehler hat eine asymmetrische Verteilung. Nimmt man für α eine Rechteckverteilung an, so errechnet sich der Erwartungswert und seine Unsicherheit zu

$$E(\delta_1) = \alpha^2/6 = 4,54 \cdot 10^{-7} \text{ und } u(\delta_1) = \sqrt{\alpha^4/45} = 4,1 \cdot 10^{-7} \quad (10)$$

δ_2 : Lagefehler

Da der Objektträger nicht exakt entlang des Scheibenradius ausgerichtet ist, wird die Position aller Streuteilchen für die Korrektur der Lage herangezogen. Für die Gesamtheit der Streuteilchen ermittelt man eine Schwankung der Position $\langle S \rangle$ von 24 μm . Da dies auch für die äußersten Streuteilchen mit dem Abstand L gilt, ist der Lagefehlerwinkel

$$\beta = \arctan(\langle S \rangle / L) \approx \langle S \rangle / L = \pm 0,0006 \quad (11)$$

sowie der Erwartungswert und seine Unsicherheit

$$E(\delta_2) = \beta^2 / 2 = 1,8 \cdot 10^{-7} \text{ und } u(\delta_2) = \sqrt{\beta^4 / 2} = 2,55 \cdot 10^{-7}. \quad (12)$$

δ_3 : Verschiebungsfehler

Aus der Korrelation der Signale von der Fläche des Glaträgers erhält man für die horizontale Verschiebung einen Schwankungswert von 55 μm . Mit einem minimalen Abstand des Glaträgers zur Achse der rotierenden Scheibe von 44 mm ergibt sich

$$E(\delta_3) = (x/r_{\min})^2 / 2 = 7,8 \cdot 10^{-7} \text{ und } u(\delta_3) = \sqrt{(x/r_{\min})^4 / 2} = 1,1 \cdot 10^{-6}. \quad (13)$$

ω : Rotationsgeschwindigkeit

Die rotierende Scheibe wird von einem Schrittmotor angetrieben, dessen Winkelgeschwindigkeit von einem Quarzoszillator konstant gehalten wird. Mit $\omega = 2\pi/T$ ist ihr Unsicherheitsbeitrag

$$u(\omega) = 2\pi \frac{-u(T)}{T^2} \text{ und } \frac{u(\omega)}{\omega} = \frac{-u(T)}{T} \quad (14)$$

Die Unsicherheit der Scheibenperiode nach Mittelung über 115 Umdrehungen beträgt $u(T) = 4,2 \mu\text{s}$ bei der Drehzahl von 7 Umdrehungen/s. Das ergibt die Unsicherheit von $u(\omega) = 1,3 \cdot 10^{-3}/\text{s}$ und die relative Unsicherheit $u(\omega)/\omega = 8,5 \cdot 10^{-5}$.

Δr : Radiendifferenz

Der Abstand Δr zwischen zwei Streuteilchen wird von dem Lithographieprozess bestimmt. Der Glaträger wird in Felder der Kantenlänge von 100 μm aufgeteilt, die einzeln von der Elektronenkanone bestrahlt werden. Die Unsicherheit des Zusammensetzens der Felder ist 25 μm und wird interferometrisch gesteuert. Die Unsicherheit ist daher $u(\Delta r)/\Delta r = 2,5 \cdot 10^{-5}$ für $\Delta r > 10 \text{ mm}$. Die Unsicherheit ist hier geringer als die bei einer Messung auf dem Scheibenrand, da die Exzentrizität der Scheibe keinen Einfluss hat.

Δf : Frequenzdifferenz

Die LDA-Signale werden mittels Fouriertransformation ausgewertet. Die Unsicherheit dieser Methode für ein einzelnes Doppler-Signal ist unter Berücksichtigung der Cramér-Rao-Regel (CRB) nach Rife und Boorstyn:

$$u(f_D) = \sqrt{\frac{6}{(2\pi) \cdot SNR \cdot N \cdot (N^2 - 1)}} \cdot f_s \quad (15)$$

Bei einer Abtastfrequenz f_s von 50 MHz, der Speichertiefe N von 2048, einem Signal-Rauschverhältnis von 20 dB und der Dopplerfrequenz von 1 MHz ist die Unsicherheit $u(f_D) = 21 \text{ Hz}$ oder $u(f_D)/f_D = 2,1 \cdot 10^{-5}$ und die der Differenzfrequenz $u(\Delta f_D) = 21 \text{ Hz} \cdot \sqrt{2} = 30 \text{ Hz}$.

Kombinierte Unsicherheit

In der nachfolgenden Tabelle 1 sind alle Unsicherheitsbeiträge zusammengefasst:

Beitrag	Fehlerquelle	Wert	Typ	Freiheitsgrad
$u(\delta_1)$	Gierwinkelfehler	$4,1 \cdot 10^{-7}$	B	∞
$u(\delta_2)$	Lagefehler	$2,55 \cdot 10^{-7}$	B	∞
$u(\delta_3)$	Verschiebungsfehler	$1,1 \cdot 10^{-6}$	B	∞
$u(\omega)$	Winkelgeschwindigkeit	$1,3 \cdot 10^{-3}/s$	A	114*
$u(\Delta r)$	Radiendifferenz	$2,5 \cdot 10^{-6}m$	A	>1000
$u(\Delta f_D)$	Differenzfrequenz	$2,5 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta f_D$	B	∞

Mit $K^2 = (1 - E(\delta_1) - E(\delta_2) - E(\delta_3))^2 = 0,999997 \approx 1$ errechnet sich die kombinierte relative Unsicherheit zu

$$u_c(d)/d = 9,35 \cdot 10^{-5}.$$

Nach der Welch-Satterthwaite-Gleichung beträgt für einen Freiheitsgrad der kombinierten Unsicherheit von 125 die erweiterte Unsicherheit

$$u_{95}(d)/d = 1,87 \cdot 10^{-4}.$$

Eine Übersicht des Einflusses der Einzelbeiträge zur Gesamtunsicherheit zeigt die Tabelle 2:

Beitrag	Wert	Einfluss in %
$u^2(\delta_1)/K^2$	$1,68 \cdot 10^{-13}$	-
$u^2(\delta_2)/K^2$	$2,79 \cdot 10^{-14}$	-
$u^2(\delta_3)/K^2$	$4,90 \cdot 10^{-13}$	-
$u^2(\omega)/\omega^2$	$7,23 \cdot 10^{-9}$	82,6
$u^2(\Delta r)/\Delta r^2$	$6,25 \cdot 10^{-10}$	7,1
$u^2(\Delta f_D)/\Delta f_D^2$	$9,00 \cdot 10^{-10}$	10,3

Die Beiträge zur Unsicherheit bei der Differenzenmessung auf den Seitenflächen des Glaszylinders entsprechen denen der Kalibrierung auf der Zylinderfläche, wenn die Exzentrizität berücksichtigt wird. Da hier der Glasträger ortsfest auf dem Glaszylinder angebracht ist, entfällt der Einfluss der Exzentrizität.

Die hier vorgestellte Unsicherheitsbetrachtung untersuchte die Darstellung der Geschwindigkeit von einem Streuteilchen eingenommenen Ort auf der Scheibenoberfläche. Im Folgenden soll daher zusätzlich der Einfluss des Streuprozesses auf das Geschwindigkeitssignal untersucht werden.

Einfluss der Streuteilchen

Für ein Streuteilchen mit zufälliger Strukturierung bei einem Durchmesser D von 5 μm im Abstand von $r = 44$ mm von der Scheibenachse und der Annahme einer Rechteckverteilung wäre der Beitrag

$$u(D/r) = D / (r\sqrt{12}) = 3,28 \cdot 10^{-5}. \quad (16)$$

Dieser Beitrag entfällt jedoch, da alle Streuteilchen identisch gefertigt sind, siehe Abb. 1. Wenn sich ein zweites oder mehrere unerwünschte Streuteilchen zusätzlich im Messvolumen aufhalten, können die Störsignale dagegen große Abweichungen erzeugen. Anhand einer Simulation sollen die entstehenden Frequenzabweichungen aufgezeigt werden, wenn sich ein Störteilchen in einem Abstand der halben Breite bei halber Maximalampli-

tude (HWHM) des Messvolumensignals befindet und sich die Phase des Dopplerbursts um 90° unterscheidet, siehe Abb. 5 links. Als Parameter wird die Amplitude des Störsignals von 0 % bis 100 % variiert. Bei Amplituden des Störsignals von über 2 % erhält man bereits Frequenzabweichungen von über 0,1 %, ohne dass sich der Modulationsgrad wesentlich ändert. Ein ähnliches Ergebnis erzielt man, wenn die Phase des Störsignals bei gleicher Amplitude schrittweise von 0° bis 90° verändert wird, siehe Abb. 5 rechts.

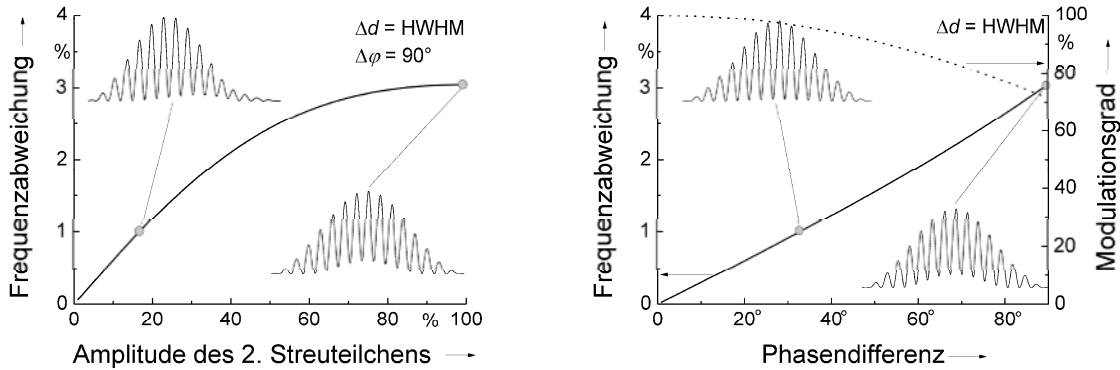


Abb. 5: Frequenzabweichung bei Variation von Amplitude und Phase eines Störsignals

Da die Mehrteilchenstreuung nicht ausgeschlossen werden kann und die Frequenzabweichungen phasenabhängig sind und daher für verschiedene Streifenabstände unterschiedlich ausfallen, ist für die folgende Kalibrierung des Streifenabstands die Messung an einer Anzahl verschiedener möglichst einzelner Streuteilchen notwendig.

Kalibrierung eine LDAs

Im Folgenden soll ein typisches LDA untersucht werden, dessen inverser Streifenabstand (Frequenz) und Amplitudenverteilung im Messvolumen in Abb. 6 dargestellt wird.

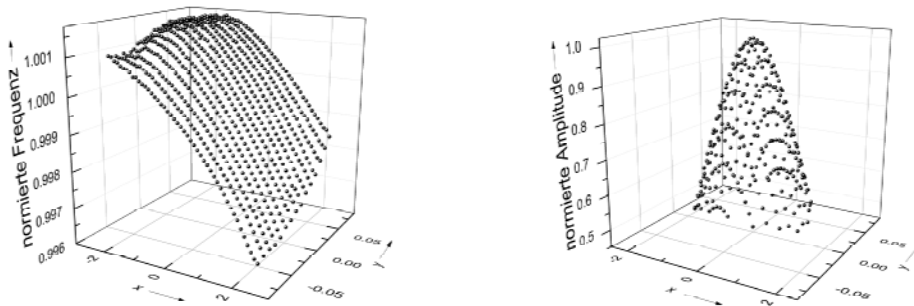


Abb. 6: Normierte Signalfrequenz und Amplitude des Messvolumens

Aus den Amplitudenverteilungen der Signale innerhalb des LDA-Messvolumen wurde durch Fitten das Maximum der Amplitude bestimmt und die Dopplerfrequenz an diesem Ort ausgelesen. Für Streuteilchenpaare wurde anhand ihrer Frequenzdifferenz und dem radialen Abstand Δr zueinander der Streifenabstand d berechnet. Die Streuung der erhaltenen Streifenabstände in Abb. 7 zeigt einen heteroskedastischen Verlauf: Mit zunehmendem radialen Abstand wird die Streuung geringer. Die Unsicherheit des Streifenabstands entlang des radialen Abstands und die gewichtete Gesamtunsicherheit kann wie folgt berechnet werden:

$$\bar{u}(d) = \left(\sqrt{\sum \frac{1}{u_i^2}} \right)^{-1}, \quad u_i^2(\Delta r) = \frac{1}{N} \frac{\sum (d_{\text{mess}} - d)^2 \Delta r^2}{\Delta r^2} \quad (17)$$

Mit der relativen Unsicherheit der Einzelmessung von 0,218 % ergibt sich die Unsicherheit des Mittelwerts $u(d)/d = 0,04 \%$ für 30 Einzelmessungen. Mit dem Freiheitsgrad von 29 ergibt die erweiterte Unsicherheit für den Mittelwert d der LDA-Kalibrierung mit der Differenzenmethode

$$U_{95}(d)/d = 0,085 \%$$

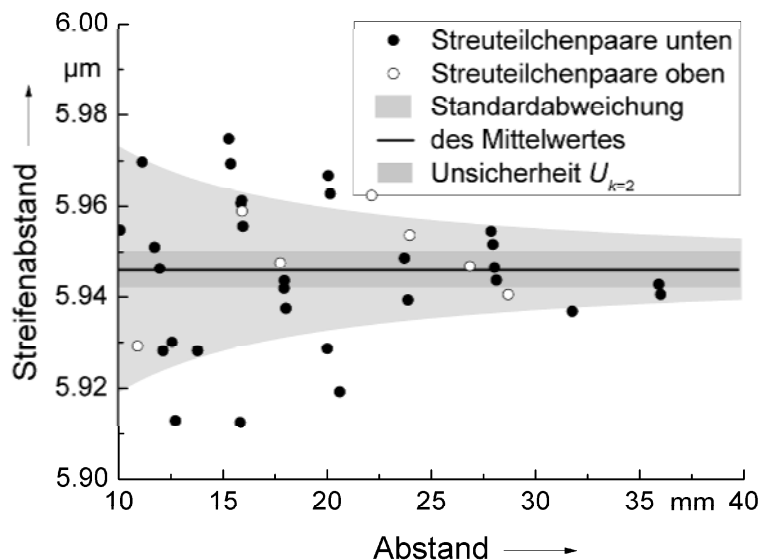


Abb. 7 Streifenabstand versus radialer Abstand

Die Darstellung der Scheibengeschwindigkeit eines Ortes auf der Zylinderfläche, an dem sich ein Streuteilchen befindet, zeichnet sich durch eine vierfach geringere Unsicherheit aus als die der mit einer Gruppe von Streuteilchen durchgeführten Kalibrierung. Für die meisten LDAs ist diese Unsicherheit jedoch ausreichend. Benötigt man eine verbesserte Unsicherheit, so bieten sich die Benutzung einer größeren Anzahl von Streuteilchen oder die Nutzung eines Reinstraums zur Vermeidung von Störsignalen an.

Literatur

JCGM/WG1: Working Group 1 of the Joint Committee for Guides in: Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement, www.bipm.org, 2008

Rife D.C. and Boorstyn R.B., "Single tone parameter estimation from discrete time observations", IEEE Trans. Inform. Theory, Vol 20, No. 5, pp 591-598, Sept. 1974

Strunck, V., Pape, N., Müller, H., Mickan, B.: "Messunsicherheit der Geschwindigkeitsdarstellung zur LDA-Kalibrierung mit rotierender Scheibe", 18. Fachtagung, Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik, veranstaltet von der Deutschen Gesellschaft für Laser-Anemometrie (GALA 2010), BTU-Cottbus, 7. – 9. September 2010, ISBN 978-3-9805613-6-5, Beitrag 4.1 – 4.8

Strunck, V., Pape, N., Weimann, T., Müller, H.: "Lithographie-Streuteilchen für die LDA-Kalibrierung", 20. Fachtagung, Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik (GALA' 2012), 4. - 6. September 2012, Universität Rostock, ISBN 978-3-9805613-8-9, Beitrag 21, S. 1 - 6