

Bestimmung höherer Momente mittels Ensemble-Korrelationsauswertung

Sven Scharnowski and Christian J. Kähler

Institut für Strömungsmechanik und Aerodynamik

Universität der Bundeswehr München, Werner-Heisenberg-Weg 39, 85577 Neubiberg

sven.scharnowski@unibw.de

PIV, Statistik, höhere Momente

Zusammenfassung

Diese Arbeit zeigt, wie aus der ensemble-gemittelten Kreuz- und Autokorrelation von PIV (Particle Image Velocimetry) – Bildpaaren mittels Rückfaltung die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF) turbulenter Geschwindigkeitsfluktuationen bestimmt werden kann. Aus der so ermittelten PDF lassen sich wiederum die mittlere Verschiebung, die Reynolds-Spannungen sowie höhere Momente zuverlässig bestimmen. Das Verfahren wurde an synthetischen PIV-Bildern getestet und die Ergebnisse wurden mit denen von Fensterkorrelation sowie Rückfaltung einer Gauß-Fitfunktion verglichen. Weiterhin wurde der Einfluss der Anzahl der PIV-Bilder, der Partikelbildgröße und der Form der PDF auf die Größe des zufälligen Fehlers untersucht. Es zeigt sich, dass die entwickelte Methode auch zur Analyse komplex geformter PDFs wie z.B. unsymmetrischer Peaks oder zweier separater Peaks geeignet ist. Die Anwendung des Verfahrens auf experimentelle PIV-Daten demonstriert seine Eignung für reelle Strömungen.

Einleitung

PIV hat sich in den letzten Jahren stetig weiterentwickelt und stellt heute ein Standardwerkzeug zur Bestimmung von Geschwindigkeitsverteilungen in transparenten Fluiden dar. Im Gegenteil zu Laser-Doppler-Anemometern und Hitzdrähten wird mit PIV eine zwei- oder dreidimensionale Geschwindigkeitsverteilung ermittelt, die fundamentale Erkenntnisse über turbulente Strukturen liefert. Neben momentanen Geschwindigkeitsfeldern ist es mit PIV aber auch möglich, statistische Größen wie die mittlere Geschwindigkeit oder Reynolds-Spannungen zuverlässig zu bestimmen. Besonders für den Vergleich von verschiedenen experimentellen Ergebnissen und für die Validierung neuer numerischer Strömungssimulationsverfahren sind statistische Werte unerlässlich. Für hinreichend viele statistisch unabhängige momentane Geschwindigkeitsfelder kann der Mittelwert der Geschwindigkeitskomponenten wie folgt bestimmt werden:

$$\langle u_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_{i,n} \quad (1)$$

Mit den Mittelwerten können Reynolds-Spannung und höhere Momente berechnet werden:

$$\langle u'_i \cdot u'_j \cdot \dots \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (u_{i,n} - \langle u_i \rangle) \cdot (u_{j,n} - \langle u_j \rangle) \cdot \dots \quad (2)$$

N ist die Anzahl der verwendeten Vektorfelder und n eine laufende Variable. Alle statistischen Größen, die mit Gleichung (1) und (2) ermittelt wurden, haben die gleiche räumliche Auflösung wie die zugrundeliegenden Vektorfelder. Folglich sind die Ergebnisse in Bereichen mit starken Gradienten fragwürdig. Darüber hinaus sind die einzelnen Geschwindigkeitsvektoren tiefpassgefiltert, da durch die Kreuzkorrelation über die Größe der PIV-Auswertefenster gemittelt wird (Kähler et al. 2012a, Scharnowski et al. 2012).

Um die räumliche Auflösung zu verbessern und das fundamentale Problem der Tiefpassfilterung zu beheben, eignen sich Ensemble-Korrelationsauswertungen (Meinhart et al. 2000, Westerweel et al. 2004) kombiniert mit einer Analyse der Korrelationsfunktionen, um die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Geschwindigkeit zu bestimmen (Adrian et al. 1988, Arnold et al. 1986, Scharnowski et al. 2012, Soria and Willert 2000). Die Autoren zeigten, dass sich mittlere Geschwindigkeit und Reynolds-Spannungen aus der PDF genauer abschätzen lassen als aus einem Ensemble von Vektorfeldern (Scharnowski et al. 2012):

$$\langle u'_i \cdot u'_j \cdot \dots \rangle = \int \text{PDF} \cdot (u'_i \cdot u'_j \cdot \dots) d\vec{u} \quad (3)$$

In diesem Beitrag wird detailliert untersucht, ob sich die PDF zuverlässig aus der Korrelationsfunktion bestimmen lässt, um höhere Momente der Geschwindigkeitsfluktuationen zu berechnen. Um diese Frage zu beantworten und den Einfluss verschiedener Parameter zu testen, werden im Folgenden synthetische PIV-Bilder mit verschiedenen PDFs generiert und analysiert.

Synthetischer Testfall

Synthetische PIV-Bilder sind gut geeignet, um den Einfluss einzelner Parameter auf die Genauigkeit der Ergebnisse abzuschätzen, siehe Kähler et al. (2012b). Ein Ensemble aus 10.000 synthetischen Doppelbildern mit einer Größe von 1.024×1.024 px wurde mit MatLab-Funktionen erzeugt und mit einer Standard-PIV-Auswertesoftware (Davis, LaVision GmbH) analysiert. Die maximale Intensität der Partikelbilder beträgt 2^{14} und ein Signal zu Rausche Verhältnis von 100:1 wurde simuliert. Der digitale Partikelbilddurchmesser ($1/e^2$ -Abfall) variiert von links nach rechts zwischen $D = 1$ px und 5 px, während sich die Form der PDF von oben nach unten ändert. Die einzelnen Grauwerte der Partikelbilder wurden aus dem Integral über die Pixelgröße berechnet, um der diskreten Natur der PIV Bilder gerecht zu werden (Scharnowski und Kähler 2013).

Die simulierte PDF besteht aus zwei Gauß-Funktionen: beide haben einen runden Querschnitt mit einem $1/e^2$ Durchmesser von 2,5 px. Die erste Gauß-Funktion befindet sich stets bei $(\Delta X, \Delta Y) = (0,0)$, während die zweite bei $(\Delta X, \Delta Y) = (s, s/2)$ liegt und die halbe Höhe der ersten hat. Der Parameter s variiert von -5 am oberen Bildrand bis +5 am unteren Bildrand. Für die synthetischen PIV-Bildpaare wurde die ensemble-gemittelte Kreuz- und Auto-Korrelation mit einer finalen Fenstergröße von 16×16 px ermittelt. Aus analytischer Sicht ergibt sich die Kreuzkorrelation C aus einer Faltung von Autokorrelation R und PDF:

$$C = R \otimes \text{PDF} \quad (4)$$

Daher kann die PDF aus C und R durch Rückfaltung gewonnen werden. Abbildung 1 zeigt Beispiele für die diskreten Funktionen C und R sowie für die rekonstruierte PDF.

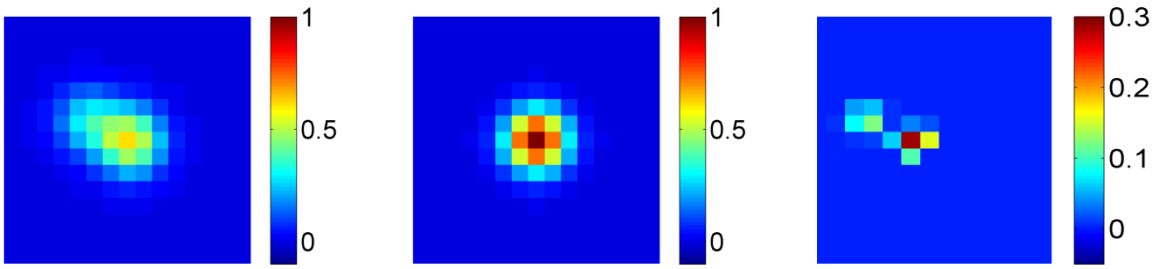


Abb. 1: Beispiel für Kreuzkorrelation (links), Autokorrelation (Mitte) und rekonstruierte PDF (rechts). Aus der so gewonnenen diskreten PDF können analog zu Gleichung (3) Reynolds-Spannungen und höhere Momente mit folgender Gleichung berechnet werden:

$$\langle u'_i \cdot u'_j \cdot \dots \rangle = \sum_u \sum_v \text{PDF} \cdot (u'_i \cdot u'_j \cdot \dots) \quad (5)$$

Abbildung 2 zeigt die Ergebnisse für die horizontale mittlere Verschiebung, Reynolds-Normalspannung in horizontaler Richtung sowie die höheren Momente dritter und vierter Ordnung der Geschwindigkeitsfluktuation der horizontalen Komponente. Die einzelnen Graphen in Abb. 2 zeigen einen Vergleich der Rückfaltung der diskreten Funktionen mit der Rückfaltung einer Fitfunktion und mit herkömmlicher Fensterkorrelation.

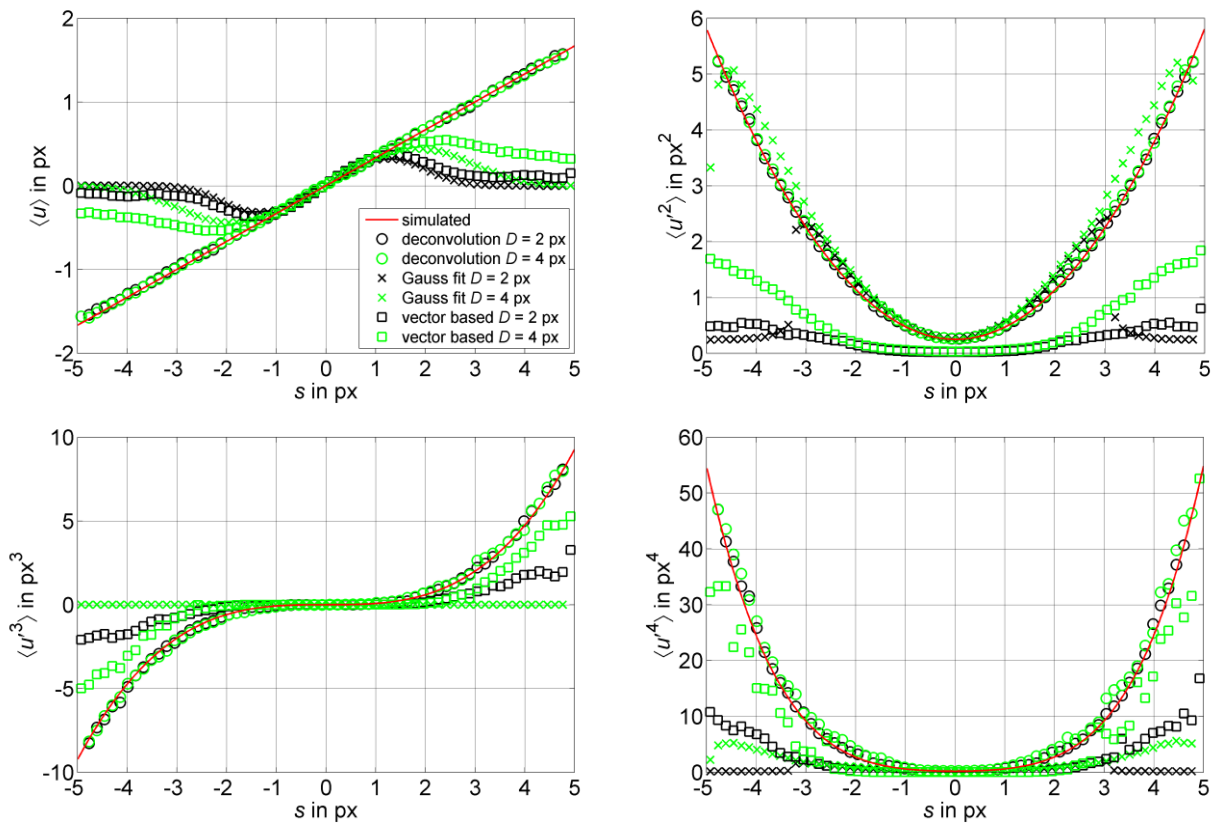


Abb. 2: Höhere Momente verschiedener Ordnungen bestimmt aus momentanen Geschwindigkeitsfeldern (vector based), mittels Rückfaltung von Fitfunktionen (Gauss fit) sowie mittels direkter Rückfaltung der diskreten Korrelationsfunktionen (deconvolution).

Da individuelle Partikelbilder in den synthetischen Daten unkorreliert sind, um kleinskalige turbulente Strukturen zu simulieren, wirkt die Fensterkorrelation als Tiefpassfilter und führt zu einer Unterschätzung der Geschwindigkeitsfluktuationen (siehe Scharnowski et al. 2012). Da hier nur der höchste Korrelationspeak berücksichtigt wird, ist für $|s| > 1$ px selbst die Abschätzung der mittleren Verschiebung systematisch verfälscht.

Die Gauß-Fitfunktion in Kombination mit Rückfaltung der analytischen Funktion eignet sich gut zur Bestimmung von Reynolds-Spannungen, solange die zwei Peaks der PDF nicht separiert sind ($s < 3$ px). Für größere Abstände der Peaks kommt es auch bei dieser Methode zu systematischen Verfälschungen. Darüber hinaus werden aufgrund der Symmetrie der Fitfunktion einige Momente ($\langle u'^3 \rangle$, $\langle u'^2 v' \rangle$, ...) stets auf Null geschätzt.

Die direkte Rückfaltung der diskreten Kreuz- und Autokorrelation zeigt keine systematische Verfälschung. Die mittlere Verschiebung, die Reynolds-Spannungen sowie höhere Momente können für die getesteten PDFs zuverlässig bestimmt werden, wie in Abb. 2 ersichtlich ist.

Einfluss der Anzahl der PIV Bilder

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass die direkte Rückfaltung der Korrelationsfunktionen zur Bestimmung statistischer Größen aus der so extrahierten PDF geeignet ist. In diesem Abschnitt soll nun untersucht werden, inwieweit sich die Anzahl der synthetischen PIV-Bilder auf die Größe der zufälligen Fehler der verschiedenen Werte auswirkt. Hierzu wurden 100.000 synthetische Bilder mit einer Größe von 128×128 px generiert und analysiert. Der digitale Partikelbilddurchmesser betrug $D = 2$ px und die PDF bestand wie zuvor aus zwei Gauß-Funktionen, jedoch diesmal mit einem festen Abstand von $s = 2,5$ px. Die ensemble-gemittelte Kreuzkorrelation und die Autokorrelation wurden mit einer finalen Fenstergröße von 16×16 px berechnet. Abbildung 3 zeigt die relative Standardabweichung der ermittelten Momente (normiert mit den simulierten Werten) als Funktion der Anzahl der verwendeten Doppelbilder. Wie zu erwarten war, nimmt der zufällige Fehler mit steigender Bildanzahl ab. Es ist offensichtlich, dass für die Bestimmung von Momenten höherer Ordnung mehr PIV-Bilder erforderlich sind, um die gleiche Genauigkeit wie bei Momenten niedrigerer Ordnung zu erreichen. Während 100 Bildpaare ausreichen, um $\langle u'v' \rangle$ mit einer Unsicherheit von 5% zu bestimmen, bedarf es im Fall von $\langle u'^4 \rangle$ mehr als 1.000 Bildpaaren.

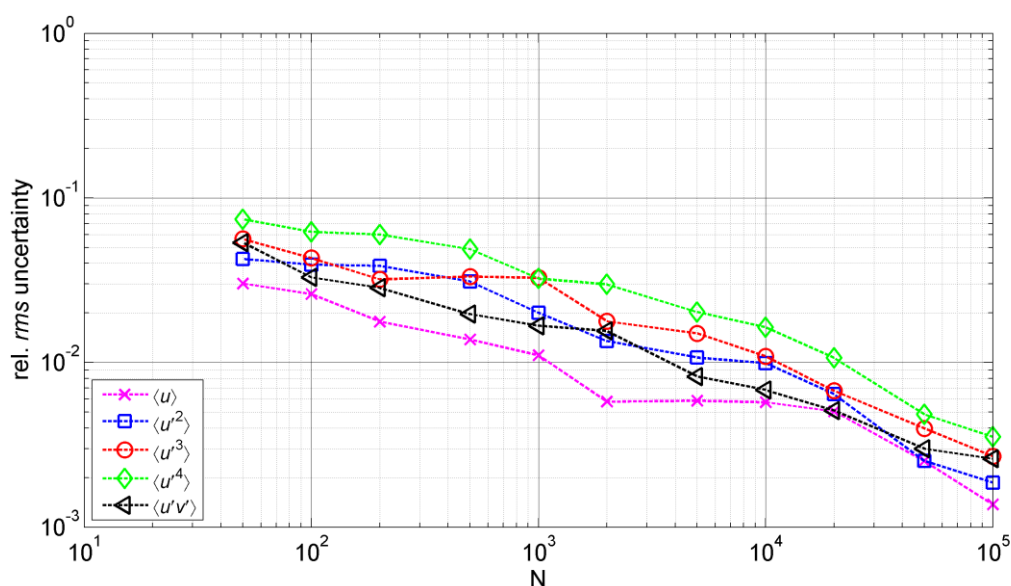


Abb. 3: Einfluss der Anzahl der PIV Doppelbilder auf die Genauigkeit der ermittelten Momente.

Einfluss der Partikelbildgröße

Ein weiterer wichtiger Parameter ist die Größe der digitalen Partikelbilder. Um deren Einfluss auf die Genauigkeit der abgeschätzten Momente zu untersuchen, wurden weitere 10.000 synthetische Bilder erzeugt und ausgewertet. Die Bilder sind 1024×1024 px groß und der $1/e^2$ -Partikelbilddurchmesser variiert von 1,5 px bis zu 10 px. Die PDF ist über die gesamte Bildgröße konstant, wobei Geschwindigkeitsfluktuationen wie im letzten Abschnitt simuliert wurden. Abbildung 4 zeigt die ermittelte Standardabweichung (normiert mit den simulierten Werten) der berechneten Momente. Der zufällige Fehler steigt mit zunehmender Partikelbildgröße. Im Bereich von $D = 1.5$ px bis 6 px ist der zufällige Fehler aller Momente und der mittleren Verschiebung auf einem nur leicht ansteigenden niedrigen Niveau. Daher eignet sich dieser Bereich besonders gut, um höhere Momente abzuschätzen.

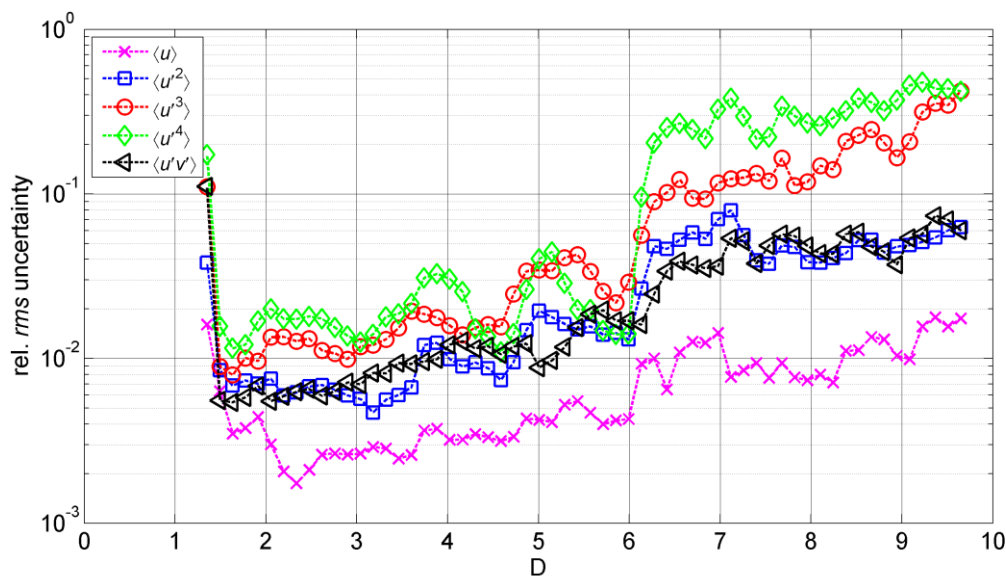


Abb. 4: Einfluss der Partikelbildgröße auf die Genauigkeit der ermittelten Momente.

Experimentelles Beispiel

Um die Eignung des entwickelten Verfahrens für die Auswertung reeller Strömungen zu demonstrieren, wurde ein experimenteller Datensatz zur Umströmung periodischer Hügel analysiert. Die Experimente wurden in einem Wasserkanal der TU München bei einer Reynoldszahl von $Re_h = 8.000$ durchgeführt, wobei die Hügelhöhe $h = 50$ mm beträgt. Details über den Versuchsaufbau finden sich bei Rapp und Manhart (2011) sowie Cierpka et al. (2013).

Die Ergebnisse in Abb. 5 entstanden durch Rückfaltung von ensemble-gemittelten Kreuz- und Autokorrelationen. Hierzu wurden 24.000 PIV-Bildpaare der Größe von 2.560×1.100 px mit einer finalen Fenstergröße von 8×8 px ausgewertet. Die dargestellten Momente in Abb. 5 sind mit der mittleren Geschwindigkeit über dem Hügel ($x = 0$) normiert. Die turbulenten Strukturen in dieser realen Strömung sind im Gegensatz zum synthetischen Testfall von endlicher Größe und die Messungen erfolgten mit hoher Auflösung. Daher wird auch mit herkömmlicher Fensterkorrelation ein Großteil der Geschwindigkeitsfluktuationen erfasst. Die Ergebnisse der Fensterkorrelation (nicht gezeigt) weisen daher die gleiche Topologie wie die Ergebnisse der direkten Rückfaltung aus Abb. 5 auf. Dennoch finden sich bei den Werten für einige höhere Momente geringe Unterschiede, deren Ursache noch nicht geklärt werden konnte.

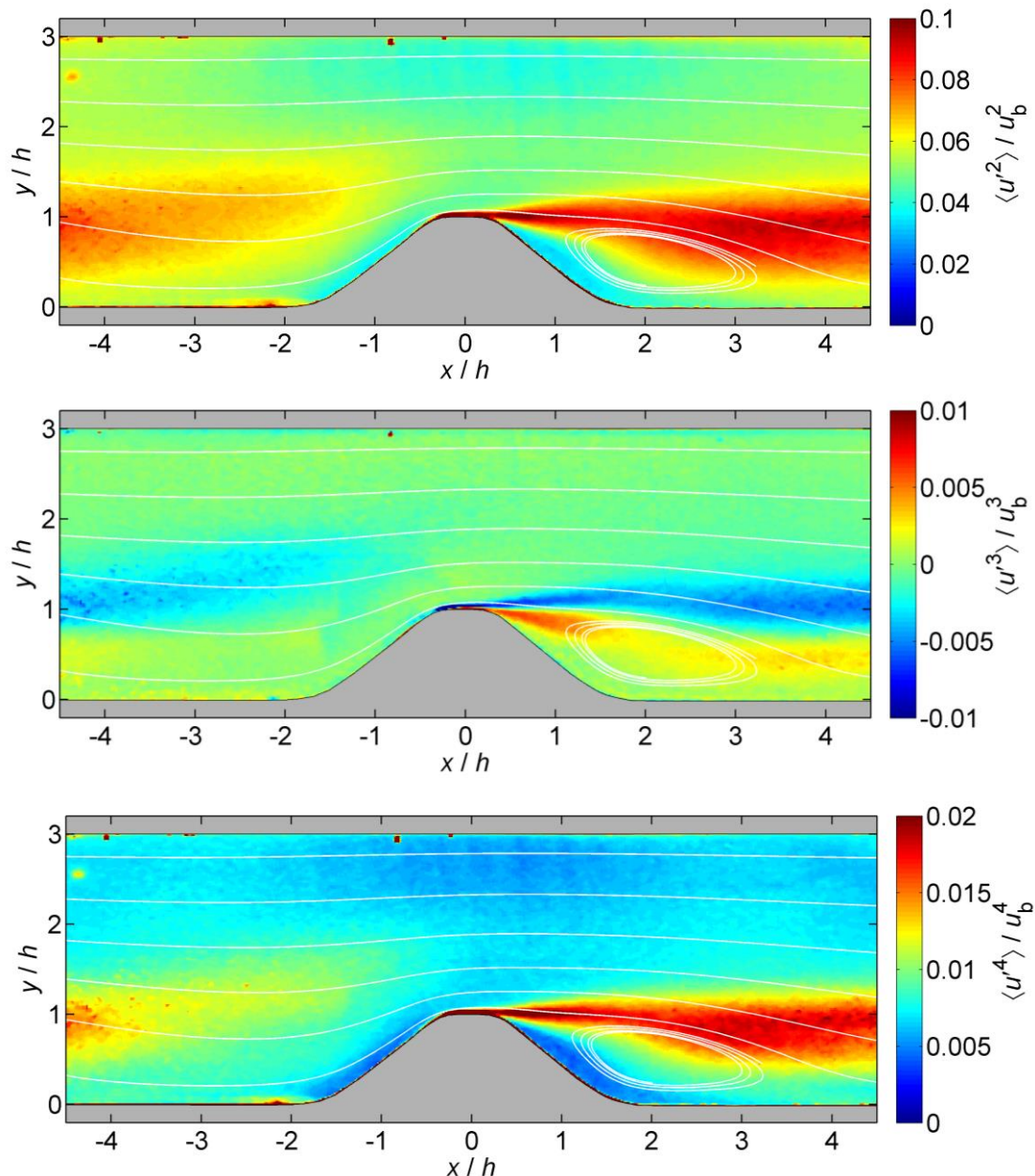


Abb. 5: Beispielhafte Momente verschiedener Ordnungen für die Strömung über periodische Hügel.

Schlussfolgerungen

Das entwickelte Verfahren zur Abschätzung der PDF mittels direkter Rückfaltung der Korrelationsfunktionen liefert zuverlässige Werte für mittlere Geschwindigkeit, Reynolds-Spannungen und höhere Momente. Der Vergleich zur herkömmlichen Fensterkorrelation und zur Rückfaltung einer Gauß-Fitfunktionen zeigt, dass nur die direkte Rückfaltung kompliziert geformte PDFs korrekt auswerten kann. Abhängig von der erforderlichen Genauigkeit und von der Ordnung der zu schätzenden Momente sind wenige 100 bis einige tausend PIV-Doppelbilder für eine zuverlässige Auswertung erforderlich. Für einen Partikelbilddurchmesser von $D = 1,5 \text{ px}$ bis 6 px werden die besten Ergebnisse erzielt.

Die neu entwickelte Methode ist besonders vielversprechend für die Analyse von dünnen Scherschichten, die mit geringer optischer Vergrößerung vermessen werden. Hier sind die turbulenten Strukturen klein im Vergleich zur Fenstergröße und deren Effekt wird daher nur

in der PDF erkennbar. Die PDF kann aus jeder ensemble-gemittelten Korrelationsfunktion extrahiert werden, die hinreichend glatt ist.

Dankesworte

Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die Förderung im Rahmen des Sonderforschungsbereiches TRR 40. Der experimentelle Datensatz wurde mit finanzieller Unterstützung der Europäischen Gemeinschaft erhoben (FP7/2007-2013, Nr. 265695).

Literatur

- Adrian, R.J. 1988: "Double Exposure, Multiple-Field Particle Image Velocimetry for Turbulent Probability Density". *Opt and Laser Eng*, 9:211-228
- Arnold, W., Hinsch, K.D. und Mach, D., 1986: "Turbulence level measurement by speckle velocimetry", *Appl Optics*, 25:330-331
- Cierpka, C., Scharnowski, S., Manhart, M. und Kähler, C.J., 2013: "On the significance of high spatial resolution to capture all relevant scales in the turbulent flow over periodic hills", In 10th International Symposium on Particle Image Velocimetry PIV13, Delft, The Netherlands
- Kähler, C.J., Scharnowski, S. und Cierpka, C., 2012a: "On the resolution limit of digital particle image velocimetry", *Exp Fluids*, 52:1629-1639
- Kähler, C.J., Scharnowski, S. und Cierpka, C., 2012b: "On the uncertainty of digital PIV and PTV near walls", *Exp Fluids*, 52:1641-1656
- Meinhart, C.D., Wereley, S.T. und Santiago, J.G., 2000: "A PIV algorithm for estimating time-averaged velocity fields", *J Fluids Eng*, 122:285-289
- Rapp, C. und Manhart, M., 2011: "Flow over periodic hills: an experimental study", *Exp Fluids*, 51:247-269
- Scharnowski, S., Hain, R. und Kähler, C.J., 2012: "Reynolds stress estimation up to single-pixel resolution using PIV-measurements", *Exp Fluids*, 52:985-1002
- Scharnowski, S. und Kähler, C.J., 2013: "On the effect of curved streamlines on the accuracy of PIV vector fields", *Exp Fluids*, 54:1435
- Soria, J. und Willert, C., 2012: "On measuring the joint probability density function of three-dimensional velocity components in turbulent flows". *Meas Sci Tech*, 23:065301
- Westerweel, J., Geelhoed, P.F. und Lindken, R., 2004: "Single-pixel resolution ensemble correlation for micro-PIV applications", *Exp Fluids*, 37:375-384