

Partikelbasierte Strömungsmessung unter Ausnutzung typischer Bewegungsmuster

Particle based fluid flow measurement using typical motion models

Julian Stapf, Christoph Garbe

Image Processing and Modeling, Interdisciplinary Center for Scientific Computing,
Universität Heidelberg
julian.stapf@ivr.uni-heidelberg.de

Schlagworte: Optischer Fluss, PIV, Hauptkomponentenzerlegung, Bewegungsmuster
Keywords: optical flow, PIV, proper orthogonal decomposition, motion models

Zusammenfassung

Zur Bestimmung von Strömungsgeschwindigkeiten aus Tracer-Partikelbildern wird ein lernbasierter optischer Fluss Schätzer vorgeschlagen. Dieser verwendet lineare, parametrisierte, räumlich-zeitliche Bewegungsmuster, welche zuvor durch Methoden des *unsupervised learning*s mittels Hauptkomponentenzerlegung bestimmt wurden. Die Bewegungsmuster beinhalten Informationen über den komplexen Zusammenhang benachbarter Geschwindigkeitsvektoren und können somit zur Bewegungsschätzung herangezogen werden. Durch Wahl geeigneter Trainingsdaten können die Bewegungsmuster leicht für verschiedene Anwendungen optimiert werden. Der Ansatz kann als eine um lineare, situationsabhängige Bewegungsmuster erweiterte Variante des Strukturtensoansatzes zur Bestimmung des optischen Flusses aufgefasst werden. Dadurch erhält man eine effektive, hoch genaue, individuell anpassbare und einfach zu implementierende Methode zur Strömungsmessung. Insbesondere in Bereichen mit starken Geschwindigkeitsgradienten erreicht der Ansatz eine hohe Genauigkeit.

Einleitung

Teil der strömungsmechanischen Grundlagenforschung ist es, das Strömungsverhalten von Flüssigkeiten zu beobachten und mit Hilfe geeigneter Methoden quantitative Flussfelder zu bestimmen. Eine weit verbreitete Technik hierfür ist *Particle Image Velocimetry* (PIV). Dabei wird die Strömung mit einem zu einer Ebene aufgeweiteten Laserstrahl pulsierend beleuchtet und zwei oder mehr Bilder in kurzer, zeitlicher Abfolge aufgenommen. Die Strömung wird zuvor mit kleinen Partikeln versetzt, die dann auf den Bildern sichtbar sind. Durch Berechnung der Kreuzkorrelation zwischen kleinen benachbarten Bildbereichen in aufeinanderfolgenden Bildern kann ein Geschwindigkeitsfeld berechnet werden. Eine gute Einführung in die PIV Techniken geben Raffel et al. 2007.

Alternativen zu PIV stellen die aus der Computer Vision bekannten und auf Gradientenbildern basierenden Methoden des optischen Flusses dar, die von Quénot et al. 1998 oder auch von Ruhnau et al. 2005 erfolgreich auf Partikelbilder angewandt wurden. Im Wesentlichen muss hierbei ein schlecht konditioniertes, inverses Problem gelöst werden, was durch

geeignete Regularisierung (siehe Horn und Schunck 1981) bzw. durch lokale Mittelung (siehe Lucas und Kanade 1981 bzw. Garbe et al. 2003) realisiert werden kann.

Der hier vorgestellte Ansatz basiert auf der Arbeit von Nieuwenhuis et al. 2010 und kann als Erweiterung des Strukturtensoransatzes von Bigün 2006 angesehen werden. Dabei wird zur Lösung des optischen Fluss-Problems Vorwissen in Form von zuvor gelernten Bewegungsmustern verwendet. Die Bewegungsmuster werden ähnlich wie bei Black et al. 1997 mit Hilfe einer Hauptkomponentenzerlegung aus geeigneten Trainingsvektorfeldern gelernt. Anders als bei Black et al. 1997 können die Bewegungsmuster jedoch räumlich und zeitlich ausgedehnt sein. Ein Geschwindigkeitsvektor kann dann in Abhängigkeit einer kleinen lokalen räumlich-zeitlichen Umgebung mittels einer Linearkombination der gelernten Bewegungsmuster und einem noch zu bestimmenden Parametervektor geschätzt werden.

Ein solcher Ansatz erlaubt es, Informationen, die nur an den Tracerpartikelpositionen vorliegen, in einer physikalisch korrekten und konsistenten Form in Bereiche ohne Strömungsinformation zu interpolieren.

Grundlagen

Der lernbasierte Ansatz ist eng angelehnt an die Methoden des optischen Flusses, die aus dem Bereich der *Computer Vision* bekannt sind. Dabei wird aus einem Bildpaar oder auch aus einer Bildsequenz ein Verschiebungsvektorfeld geschätzt. Mit einem korrekt geschätzten Verschiebungsfeld kann aus einem Bild der Sequenz das nächste Bild berechnet werden. Das Verschiebungsvektorfeld entspricht also dem Geschwindigkeitsfeld der Grauwertintensitäten, wenn die Zeit auf die Zeitdifferenz zweier aufeinanderfolgender Bilder normiert wird. Im Idealfall mit konstanter, homogener Beleuchtung, sowie gut texturierten Objekten ist das Verschiebungsfeld eine Näherung der auf zwei Dimensionen projizierten, echten, räumlichen Bewegungen. Dem interessierten Leser empfehlen wir Haussecker und Spies 1999 sowie Barron et al. 1994, die einen guten Überblick über die Methoden des optischen Flusses geben.

Sei $g(\mathbf{x}, t)$ die Helligkeit bzw. der Grauwert eines Bildpixels an der Stelle $\mathbf{x} = (x, y)^T$ und sei $\mathbf{u} = (u, v)^T$ der Verschiebungsvektor zwischen zwei aufeinanderfolgenden Bildern an der Stelle \mathbf{x} , dann gilt unter der Annahme, dass die Helligkeit eines sich bewegenden Bildpixel konstant ist:

$$g(x+u, y+v, t+1) = g(x, y, t) \quad . \quad (1)$$

Für kleine Verschiebungen erhält man mit Hilfe einer Taylornäherung erster Ordnung die *Brightness Constancy Constraint Equation* (BCCE), die die Standardgleichung des optischen Flusses ist.

$$(\nabla g)^T \cdot \mathbf{u} + g_t = 0 \quad (2)$$

Dabei bezeichnet (∇g) den räumlichen Gradienten von g in x - und y -Richtung und g_t die partielle Zeitableitung.

Gleichung (2) ist ein schlecht gestelltes Problem, da auf eine Gleichung zwei Unbekannte u und v kommen. In der Bilderverarbeitung gibt es verschiedene Ansätze dieses sogenannte Aperturproblem zu umgehen.

- *Globale Methoden* werden als Optimierungsproblem formuliert, wobei ein Energiefunktional bestehend aus einem Datenterm und einem Regularisierungsterm mini-

miert werden muss. Vorgeschlagen wurde der Ansatz von Horn und Schunck 1981, die als Datenterm die BCCE und als Regularisierung Glattheit der Lösung forderten.

- Bei *lokalen Methoden* wird angenommen, dass der optische Fluss innerhalb einer kleinen, lokalen Nachbarschaft konstant ist. Dadurch erhält man ein überbestimmtes Gleichungssystem, welches z.B. mit der *Methode der kleinsten Quadrate* gelöst werden kann. Für weitere Informationen zu den lokalen Ansätzen sei auf Lucas und Kanade 1981 bzw. Bigün et al. 1991 verwiesen.

Lokale Methoden sind im Allgemeinen robuster gegenüber Bildrauschen als globale Methoden. Sie haben aber den Nachteil, dass in Regionen mit wenig Struktur kein Flussvektor geschätzt werden kann und das Flussfeld dadurch unter Umständen nicht dicht ist.

Methode

Anstatt den optischen Fluss direkt aus Gleichung (2) zu schätzen werden bei unserem lernbasierten Ansatz Parameter geschätzt, die zusammen mit bestimmten lokalen Bewegungsmustern das gewünschte Flussfeld ergeben. Bei parametrisierenden Ansätzen werden je nach Modell unterschiedliche Bewegungsmuster zugrunde gelegt. Das einfachste Modell mit konstantem Fluss in x - und y -Richtung entspricht gerade dem lokalen Ansatz von Lucas und Kanade 1981. Alternativ können auch affine Transformationen als Bewegungsmuster verwendet werden (siehe Haussecker und Spies 1999).

Beim lernbasierten Ansatz, der in Abb. 1 skizziert ist, werden typische Bewegungsmuster mit Hilfe einer *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) bzw. Hauptkomponentenzerlegung aus einem geeigneten Satz von Trainingsvektorfeldern gelernt. Durch die Wahl der Trainingsdaten kann die Methode leicht für unterschiedliche Strömungssituationen optimiert werden. Als Trainingsdaten verwendet werden können synthetisch erzeugte Vektorfelder oder auch beliebige andere Vektorfelder, die ein ähnliches Strömungsverhalten zeigen, und dementsprechend auch ähnliche Bewegungsmuster enthalten, wie die zu bestimmende Strömungssituation. Wenn in der Strömung, von der das Geschwindigkeitsfeld geschätzt werden soll z.B. Rotationen vorkommen, so müssen die Trainingsdaten ebenfalls Rotationen enthalten, da diese sonst in den typischen Bewegungsmustern fehlen und nicht dargestellt werden können. Um die Strömungsgeschwindigkeiten also verlässlich schätzen zu können, müssen die Bewegungsmuster aus geeigneten und korrekt bestimmten Flussfeldern ermittelt werden.

Zum Lernen der Bewegungsmuster werden mehrere tausend kleine, lokale Nachbarschaften ω zufällig aus den Trainingsfeldern herausgegriffen und in lexikographischer Ordnung als Spaltenvektoren in eine große Matrix geschrieben. Dabei werden die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten in die obere Hälfte und die vertikalen Geschwindigkeitskomponenten in die untere Hälfte des Vektors geschrieben. Die lokalen Bereiche können je nach Trainingsdaten räumlich und auch zeitlich ausgedehnt sein.

Um richtungsunabhängige Bewegungsmuster zu erhalten und um Mittelwertfreiheit der Datenmatrix zu erreichen, werden die lokalen Nachbarschaften zusätzlich noch mehrfach rotiert und gespiegelt und es wird die Zeitrichtung umgekehrt. Wobei für jeden Fall ein eigener Spaltenvektor erstellt wird. Die so erhaltene Datenmatrix A hat die Größe $2N \times M$, wobei N die Anzahl der Vektoren in einer lokalen Nachbarschaft, und M die Anzahl der verwendeten Umgebungen multipliziert mit der Anzahl aller Rotationen, Spiegelungen und der Zeitumkehr bezeichnet. Der Faktor 2 kommt daher, dass die Vektoren eine horizontale und eine vertikale Komponente haben.

Aus der Matrix A werden jetzt mittels POD $2N$ orthogonale Basisfunktionen Φ_n mit $n \in [1, 2N]$ bestimmt. Hierfür wird eine Singulärwertzerlegung (SVD) durchgeführt (siehe Nobach et al. 2007). Zu jeder der $2N$ Basisfunktionen existiert ein Singulärwert σ_n , der die Varianz oder den Informationsgehalt, der in der Basisfunktion enthalten ist, wiedergibt.

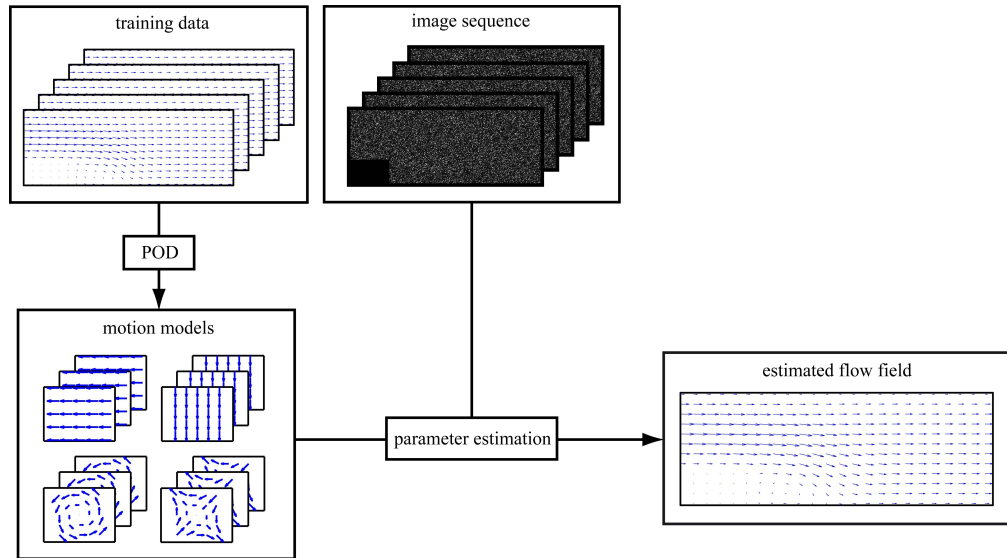


Abb. 1: Schematische Darstellung des Ansatzes. Mittels *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) werden aus einem Satz von Trainingsvektorfeldern typische Bewegungsmuster gelernt, die dann zur Bestimmung des optischen Flusses verwendet werden.

Die Sigulärwerte sind ihrer Größe nach in absteigender Reihenfolge sortiert. In der Regel fällt der Informationsgehalt sehr schnell ab, so dass nur die ersten Basisfunktionen von Bedeutung sind. In den letzten Funktionen steckt lediglich Rauschen. Daher wird von den ersten $k \leq n$ Basisfunktionen ein k -dimensionaler Unterraum der ursprünglichen Datenmatrix aufgespannt, der jedoch die meiste Information enthält. Die so gelernten orthogonalen Basisfunktionen Φ_i entsprechen den typischen Bewegungsmustern, die wir zur Bestimmung des optischen Flusses heranziehen wollen.

Eine beliebige Geschwindigkeitsvektorumgebung $\mathbf{u}(\omega)$ kann durch eine Linearkombination der ersten k Basisfunktionen angenähert werden.

$$\mathbf{u}(\omega) \approx \sum_{i=1}^k \alpha_i \Phi_i \quad (3)$$

Für die Bestimmung der Flussvektorumgebung $\mathbf{u}(\omega)$ müssen die Parameter α_i geschätzt werden. Dazu verwenden wir die BCCE (2) und ersetzen den Verschiebungsvektor \mathbf{u} durch die Linearkombination (3). Daraus erhalten wir

$$\mathbf{G}_{x,y} \cdot \sum_{i=1}^k \alpha_i \Phi_i + \mathbf{g}_t = 0 \quad (4)$$

mit der Gradientenmatrix

$$\mathbf{G}_{x,y} = \begin{pmatrix} g_{x1} & 0 & \cdots & 0 & g_{y1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{x2} & 0 & \cdots & 0 & g_{y2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & g_{xN} & 0 & \cdots & 0 & g_{yN} \end{pmatrix}$$

wobei g_{xi} den Gradienten in x -Richtung an der Stelle $i \in \omega$ der lokalen Umgebung und g_{yi} den Gradienten in y -Richtung an der Stelle i der lokalen Umgebung bezeichnet.

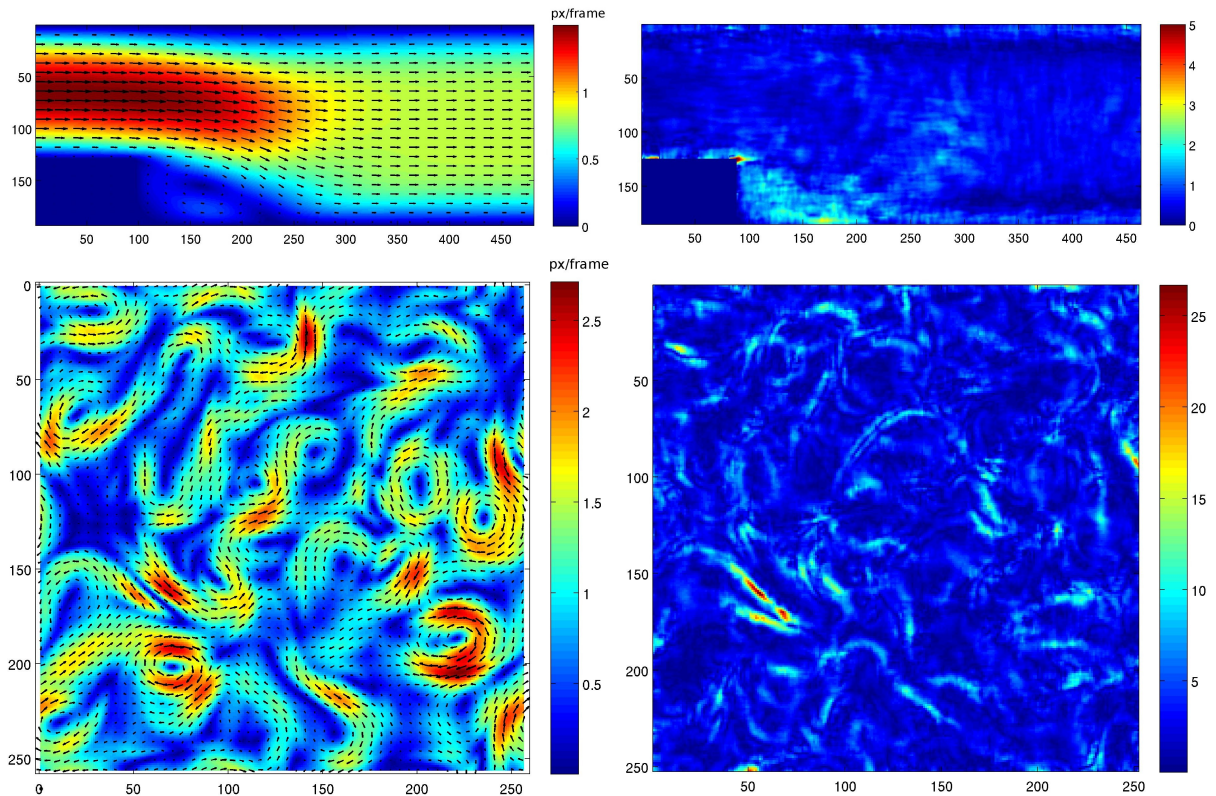


Abb. 2: Oben ist für die BFS Sequenz links das korrekte Flussfeld und rechts der *Angular Error* des lernbasierten Ansatzes für eine Größe der Bewegungsmuster von $15 \times 15 \times 7$ dargestellt. Unten ist links das korrekte Flussfeld der 2D turbulenten Sequenz und rechts der *Angular Error* des lernbasierten Ansatzes für eine Größe von $11 \times 11 \times 3$ zu sehen.

Eine Matrixmultiplikation von $G_{x,y}$ mit der $2N \times K$ Matrix U_K , die die ersten k Bewegungsmuster Φ_i als Spaltenvektoren enthält liefert die $N \times K$ Matrix $B = G_{x,y} \cdot U_K$. Damit kann Gleichung (4) in Matrixnotation angegeben werden.

$$B \cdot \alpha = -g_t \quad (5)$$

Dieses lineare Gleichungssystem kann z.B. mit der *Methode der kleinsten Quadrate* gelöst, und dadurch der Parametervektor α für jedes Bildpixel in Abhängigkeit einer kleinen lokalen Umgebung ω bestimmt werden. Zusammen mit den zuvor gelernten Bewegungsmustern Φ_i kann dann mit Hilfe der Linearkombination (3) für dieses Pixel ein Verschiebungsvektor bestimmt werden. Um ein dichtes Verschiebungsvektorfeld zu erhalten muss Gleichung (5) für jedes Pixel gelöst werden. Durch die Linearkombination (3) wird die Lösung des optischen Fluss-Problems auf den von den typischen Bewegungsmustern aufgespannten Unterraum eingeschränkt.

Testsequenzen

Der Ansatz wurde an synthetisch generierten Bildsequenzen getestet. Diese haben den Vorteil, dass das korrekte Geschwindigkeitsfeld bekannt ist und als Vergleich herangezogen werden kann. Als Fehlermaß zwischen korrektem und geschätztem Flussfeld wird der *Average Angular Error* (AAE), wie er von Barron et al. 1994 definiert wurde, verwendet. Ein weiterer Vorteil von synthetisch erzeugten Bildsequenzen ist, dass Parameter wie der maximale Geschwindigkeitsbetrag, die Grauwertintensitäten oder auch das Rauschniveau einfach kontrolliert und verändert werden können.

Methode	Backward Facing Step		2D Turbulenz	
	AAE	σ	AAE	σ
LBA	0,64	0,40	2,87	2,14
LBA-fremd	0,69	0,74	2,91	2,15
STA	0,87	0,90	4,55	3,99
HSA	0,99	0,79	3,99	2,93
PIV	0,94	0,60	5,87	3,97

Tab. 1: *Average Angular Error* (AAE) und Standardabweichung der getesteten Ansätze für die BFS und die 2D turbulente Sequenz.

Zum einen wurde die 2D Strömung eines *Backward Facing Step* (BFS) mit Hilfe der Finiten Elemente Software *deal.II* (Bangerth et al. 2007) für Reynoldszahlen zwischen 1000 und 5000 simuliert, und daraus eine synthetische, auf Partikeln basierende Bildsequenz erzeugt. Zum anderen wurden synthetisch erzeugte Partikelbilder einer von Carlier und Heitz 2005 zur Verfügung gestellten numerischen Simulation einer sich selbst erhaltenden 2D turbulenten Strömung verwendet. In Abb. 2 ist jeweils das korrekte Geschwindigkeitsfeld der Sequenz zusammen mit dem *Angular Error* des lernbasierten Ansatzes dargestellt.

Alle Bildableitungen wurden mit den für optischen Fluss optimierten $5 \times 5 \times 5$ Filtern von Scharf 2004 berechnet.

Ergebnisse

Der lernbasierte Ansatz (LBA) wurde mit dem lokalen Strukturtensoansatz (STA), dem globalen Ansatz von Horn und Schunck (HSA), sowie einem korrelationsbasierten *Particle Image Velocimetry* Ansatz (PIV) verglichen.

Die PIV Geschwindigkeitsfelder wurden mit Hilfe des grafischen Softwarepakets *Fluere 1.3* von Kyle P. Lynch bestimmt. Dieses beruht auf dem Ansatz von Scarano und Riethmuller 2000, bei dem durch relative Transformation der Abfragefenster die Übereinstimmung der Fenster verbessert wird.

Für die BFS Sequenz wurden die folgenden Ansätze miteinander verglichen:

- Beim LBA wurden die Bewegungsmuster aus den korrekten Geschwindigkeitsfeldern gelernt. Für die Schätzung des optischen Flusses wurden die ersten 5 Bewegungsmuster mit einer Größe von $15 \times 15 \times 7$ verwendet.
- Beim LBA-fremd wurde auf den Geschwindigkeitsfeldern der 2D turbulenten Sequenz gelernt. Es wurden 22 Bewegungsmuster der Größe $15 \times 15 \times 7$ verwendet.
- Für den STA wurde eine lokale Umgebung der Größe $11 \times 11 \times 7$ gewählt.
- Beim HSA lieferte der Glattheitsparameter $\gamma = 0,19$ das beste Ergebnis.
- Beim PIV Ansatz wurde eine anfängliche Fenstergröße von 64×64 und eine finale Fenstergröße von 8×8 Pixel gewählt, wobei sich die Fenster um 50% überlappen.

Bei der 2D turbulenten Sequenz wurden folgende Parameter gewählt:

- Für die Bestimmung des optischen Flusses mit dem LBA wurden die ersten 21 Bewegungsmuster mit Größe $11 \times 11 \times 3$ verwendet. Sie wurden aus den korrekten Geschwindigkeitsfeldern gelernt.
- Beim LBA-fremd wurden die Bewegungsmuster aus den BFS Geschwindigkeitsfeldern gelernt. Es wurden die ersten 22 Muster der Größe $11 \times 11 \times 3$ verwendet.
- Beim STA lieferte eine lokale Umgebung der Größe $11 \times 11 \times 7$ die besten Resultate.
- Beim HSA ergab der Glattheitsparameter $\gamma = 0,036$ optimale Ergebnisse.
- Die Fenstergröße beim PIV Ansatz betrug anfänglich 64×64 und am Ende 8×8 Pixel. Die Fenster überlappten sich wieder um 50%.

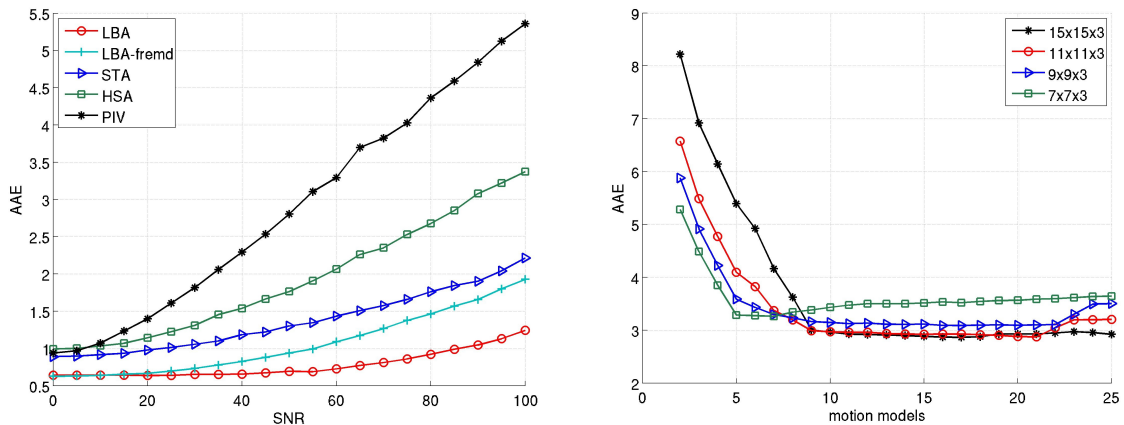


Abb. 3: Links: AAE in Abhängigkeit von SNR für verschiedene Methoden für die BFS Sequenz. Rechts: Für unterschiedlich große Bewegungsmuster ist der AAE der 2D turbulenten Sequenz gegen die Anzahl der Muster dargestellt.

Die Ergebnisse des AAE der einzelnen Methoden sind in Tab. 1 dargestellt. Der LBA liefert für beide Sequenzen die besten Ergebnisse, wobei es nur geringfügige Unterschiede macht, ob die Bewegungsmuster aus den eigenen, korrekten Geschwindigkeitsfeldern (LBA) oder aus den Geschwindigkeitsfeldern der jeweils anderen Sequenz (LBA-fremd) gelernt wurden. Neben Translationsbewegungen kommen in beiden Sequenzen vor allem auch Rotationen vor. Daher sind beide Trainingsfelder für beide Sequenzen anwendbar.

Um die Robustheit des LBA gegenüber Rauschen zu untersuchen und mit den anderen Ansätzen zu vergleichen, wurde, wie in Abb. 3 links dargestellt, für die BFS Sequenz der AAE gegen das Rausch-zu-Signal-Verhältnis (SNR) dargestellt. Die verrauschten Bildsequenzen wurden durch Addition von gaussverteilterm Rauschen mit variabler Standardabweichung zu den Bildern erzeugt. Dabei wurde die Größe der Standardabweichung in 5%-Schritten von 0% bis 100% der mittleren Signalamplitude erhöht.

Es wurde auch der Einfluss von Größe und Anzahl der verwendeten Bewegungsmuster auf das geschätzte Flussfeld untersucht. Dazu wurde für die 2D turbulente Sequenz, wie in Abb. 3 rechts zu sehen, der AAE gegen die Anzahl der Bewegungsmuster aufgetragen. Es ist gut zu erkennen, dass der AAE mit steigender Zahl von Bewegungsmustern fällt, bis er ein Plateau erreicht und nahezu konstant bleibt. Das Plateau wird für kleinere Modellgrößen früher erreicht, fällt jedoch höher aus. Für Modellgrößen größer als $11 \times 11 \times 3$ werden jedoch keine besseren Werte mehr erreicht.

Zusätzlich erhält man durch den Ansatz auch Informationen darüber, welche Bewegungsart in bestimmten Bildbereichen überwiegt. Das wird aus dem Parametervektor ersichtlich, der angibt wie stark bestimmte komplexe Bewegungsmuster in einzelnen Bereichen vertreten sind.

Zusammenfassung

Wir haben in diesem Beitrag einen optischen Fluss Ansatz zur quantitativen Bestimmung von Strömungsfeldern vorgestellt. Dieser Ansatz kann als Alternative zu den in der Strömungsmesstechnik üblichen PIV Verfahren angesehen werden. Dabei wird die Lösung durch das Erlernen und Anwenden typischer, komplexer Bewegungsmuster auf den von diesen Bewegungsmustern aufgespannten Raum eingeschränkt. Der zu bestimmende Parametervektor gibt Aufschluss darüber, welche Bewegungsarten in bestimmten Bildbereichen vertreten sind. Auf diese Weise wird Vorwissen, welches aus den Trainingsdaten bekannt ist mit in die Geschwindigkeitsschätzung eingebracht. Der Ansatz ist sehr effizient, da neben einer Hauptkomponentenzerlegung zur Bestimmung der Bewegungsmuster für jedes Pixel lediglich ein

überbestimmtes, lineares Gleichungssystem mittels der Methode der kleinsten Quadrate gelöst werden muss.

Die Resultate, die mit diesem lernbasierten Ansatz erzielt werden können, sind besser, als die der Standardmethoden des optischen Flusses und auch wesentlich besser als die der zum Vergleich herangezogenen Korrelationsmethoden.

Dankesworte

Diese Arbeit wurde finanziert durch das DFG Graduiertenkolleg GRK 1114 "Optische Messtechniken für die Charakterisierung von Transportprozessen an Grenzflächen".

Literatur

Bangerth, W., Hartmann, R., Kanschat, G., 2007: "deal.II – a general purpose object oriented finite element library.", ACM Trans Math Softw., Vol. 33, No. 24, pp. 1-27

Barron, J., Fleet, D., Beauchemin, S., 1994: "Performance of optical flow techniques", IJCV, Vol. 12, No. 1, pp. 43-77

Bigün, J., Granlund G., Wiklund, J., 1991: "Multidimensional orientation estimation with application to texture analysis and optical flow" IEEE Journal of Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 13, No. 8, pp. 775-790

Bigün, J., 2006: "Vision with Direction: A Systematic Introduction to Image Processing and Computer Vision.", Springer

Black, M., Yacoob, Y., Jepson, A., Fleet, D., 1997: "Learning parameterized models of image motion" Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)

Carlier, J., Heitz, D., 2005: Von CEMAGREF zur Verfügung gestellte 2D turbulente Bildsequenz. <http://fluid.irisa.fr>

Garbe, C.S., Spies, H., Jähne, B., 2003: "Estimation of surface flow and net heat flux from infrared image sequences", Journal of Mathematical Imaging and Vision, Vol. 19(3), pp. 159-174

Haussecker, H., Spies, H., 1999: "Handbook of Computer Vision and Applications", Academic Press, Chap 13, pp 309-396

Horn, B., Schunck, B., 1981: "Determining optical flow" Artificial Intelligence, Vol.17, pp. 185-203

Lucas, B., Kanade, T., 1981: "An iterative image registration technique with an application to stereo vision" In: Proceedings of the DARPA Image Understanding Workshop 1981, pp. 121-130

Nieuwenhuis, C., Kondermann, D., Garbe, C., 2010: "Complex Motion Models for Simple Optical Flow Estimation", Pattern Recognition (Proc. DAGM), LNCS, Springer, Vol. 6376, pp.141-151

Nobach, H., Tropea, C., Cardier, L., Bonnet, J., Delville, J., Lewalle, J., Schneider, K., Adrian, R., 2007: "Handbook of Experimental Fluid Mechanics", Springer, Chap. 22, pp. 1337-1398

Quénot, G. M., Pakleza, J., Kowalewski, T. A., 1998: "Particle image velocimetry with optical flow", Experiments in Fluids, Vol. 25, pp. 177-189

Raffel, M., Willert, C., Wereley, S., Kompenhans, J., 2007: "Particle Image Velocimetry: A practical guide", Springer Verlag

Ruhnau, P., Kohlberger, T., Schnörr, C., Nobach, H., 2005: "Variational optical flow estimation for particle image velocimetry", Experiments in Fluids, Vol. 38, pp. 21-32

Scarano, F., Riethmüller, M., 2000: "Advances in iterative multigrid PIV image processing", Experiments in Fluids, Vol. 29, No. 1 Suppl., pp. 51-60

Scharr, H., 2004: "Optimal filters for extended optical flow" Complex Motion, LNCS, Springer, Vol. 3417