

## Messunsicherheitsbetrachtungen für den Laser-Doppler Profilsensor zur ortsaufgelösten Messung beschleunigter Partikel mit schräger Trajektorie

**C. Bayer, K. Shirai, L. Büttner und J. Czarske**

Technische Universität Dresden, Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik, Professur für Mess- und Prüftechnik, 01062 Dresden, [Christian.Bayer@tu-dresden.de](mailto:Christian.Bayer@tu-dresden.de)

### Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Untersuchungen zur Messunsicherheit der lateralen und axialen Geschwindigkeitskomponente sowie der Beschleunigung von Partikeln für den Laser-Doppler Profilsensor vorgestellt. Die ortsaufgelöste Messung von Lagrangescher Beschleunigung ist insbesondere für die Untersuchung turbulenter Strömungen von Interesse, da sie direkter Bestandteil der Navier-Stokes Gleichungen ist. Der Vorteil des Sensors besteht dabei in der hohen axialen Ortsauflösung im Mikrometerbereich bei gleichzeitiger Elimination des Problems von Streifenabstandsvariationen, wie sie beim konventionellen Laser-Doppler Anemometer auftreten. Es sind daher Messungen auf kleineren Skalen und somit hohen Reynolds-Zahlen möglich. Der Sensor erlaubt grundsätzlich die ortsaufgelöste Bestimmung der lateralen Geschwindigkeitskomponente eines Streupartikels entlang der optischen Achse. Für die Auswertung schräger Trajektorien ist eine zeitaufgelöste Frequenzanalyse notwendig, die hier vorgestellt und hinsichtlich der minimal erreichbaren Messunsicherheit charakterisiert wird. Mittels der erhaltenen Zeitfunktionen von Position und lateraler Geschwindigkeit ergeben sich daraus die abgeleiteten Größen von sowohl axialer Geschwindigkeitskomponente, als auch Beschleunigung. Die vorgestellte Signalverarbeitung eignet sich dabei auch für Signale mit geringem Signal-Rauschabstand und liefert Messunsicherheiten nahe der theoretischen Cramér-Rao-Grenze.

### Einleitung

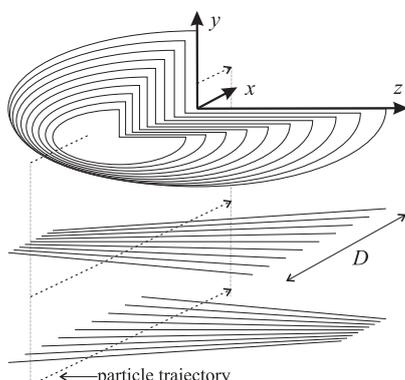
Für die Untersuchung von strömenden Medien kommen verschiedene optische Verfahren in Betracht. Sie zeichnen sich im Allgemeinen durch geringe Messunsicherheit aus und sind darüberhinaus nicht-invasiv. Auf Basis der konventionellen Laser-Doppler-Anemometrie (LDA) [1] wurde der sogenannte Laser-Doppler-Profilsensor entwickelt [2]. Die Motivation zu dessen Entwicklung war die Ermöglichung der Positionsmessung eines Streupartikels innerhalb des Messvolumens, wodurch sich die Ortsauflösung deutlich verbessert. Zu den Einsatzgebieten des Sensors gehören deshalb insbesondere die für die Turbulenzforschung wichtige Vermessung von Grenzschichten bei hohen Reynoldszahlen, Anwendungen in der Mikrofluidik und Durchflussmessungen jeglicher Art, bei der die Grenzschichten mit erfasst werden müssen. Mit dem Profilsensor ist es möglich, bereits zwei Geschwindigkeitskomponenten gleichzeitig zu erfassen. Die Variation des Streifenabstandes entlang der optischen Achse führt bei Trajektorien, die nicht senkrecht zur optischen Achse stehen, zu einem frequenzveränderlichen Burstsinal. Die Frequenzänderung innerhalb des Bursts ist dann ein Maß für die axiale Geschwindigkeitskomponente und die Mittenfrequenz entspricht

## 2.2

der mittleren Geschwindigkeit senkrecht zur optischen Achse. In [3, 4] wurde dieses Prinzip vorgestellt und mit Hilfe der Kurzzeit-FFT eine entsprechende Auswertung realisiert. Diese Vorgehensweise setzte eine konstante Geschwindigkeit des Partikels innerhalb des Messvolumens voraus, da bei auftretenden Beschleunigungen eine zusätzliche Frequenzänderung zu erwarten ist. Für die Untersuchung turbulenter Strömungen, wie z.B. Jetsrömungen, ist diese Annahme jedoch nicht mehr gerechtfertigt. Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit ist Bestandteil der Navier-Stokes-Gleichungen und wirkt sich auf die Druckverteilung innerhalb des Fluids und somit auf die auftretenden Kräfte an umströmten Flächen aus. Die Messung solcher Beschleunigungen ist deshalb für die Turbulenzforschung von großem Interesse. Sie ist unter anderem mit konventioneller LDA-Technik als Basis des Profilsensors möglich und es gibt hinsichtlich der Signalverarbeitung verschiedene Ansätze [5, 6]. Im vorliegenden Beitrag wird eine Methode vorgestellt, mit der sich die gleichzeitige Messung von sowohl Position, zwei Geschwindigkeitskomponenten, als auch Beschleunigung mit dem Profilsensor realisieren lässt. Die hierfür benötigte Signalverarbeitung basiert auf der Hilberttransformation und wird auf Grundlage der Analyse der Messunsicherheiten nach dem Verfahren von Cramér und Rao bewertet. Ausgangspunkt ist dabei ein mathematisches Modell der zu erwartenden Burstsignale unter Annahme einer geradlinigen Trajektorie.

### Der Profilsensor

Die konventionelle LDA Technik basiert auf der Überschneidung zweier kohärenter Laserstrahlen, in deren Schnittpunkt sich Flächen gleicher Phasendifferenz ausbilden. In der  $x$ - $z$ -Ebene kann dieses Interferenzmuster als Streifenmuster mit dem Streifenabstand  $d(z)$  betrachtet werden. Beim konventionellen LDA sind die Streifen dieses Systems in guter Näherung parallel, da sich die Strahltaillen im Kreuzungspunkt befinden. Der Laser-Doppler Profilsensor entsteht durch örtliche Überlagerung zweier unterscheidbarer Streifenmuster, deren Streifenabstand jedoch entlang der  $z$ -Achse variiert [2] (Abb. 1). Die Variation entsteht durch das Verlagern der Strahltaillen vor bzw. hinter den Schnittpunkt des jeweiligen Strahlenpaares. Geschwindigkeit  $v$  und Position  $z_0$  eines Streupartikels beim Passieren der optischen Achse  $z$  bestimmen sich durch die Messung an den zwei verschiedenen Streifenmustern. Bewegt sich ein Partikel ausschließlich senkrecht zur optischen Achse,



**Abb. 1** Schematische Darstellung des Messvolumens beim Profilsensor. Zur Verdeutlichung sind beide Streifenmuster und deren Variation des Streifenabstandes gesondert dargestellt. Die Unterscheidung beider Systeme erfolgt durch Frequenz- oder Wellenlängenmultiplexing [2, 7].

kann dessen Geschwindigkeit analog dem konventionellen LDA, jedoch durch zwei unabhängige Ausdrücke beschrieben werden:

$$v_{\perp}(z) = f_1 d_1(z) = f_2 d_2(z) \quad (1)$$

Um die Geschwindigkeit nach Glg.(1) ermitteln zu können, muss zunächst der Ort  $z$  bekannt sein. Das Verhältnis der beiden Streifenabstandsfunktionen  $d_2$  und  $d_1$  ist eine für den Sensor charakteristische Größe und bildet die sogenannte Kalibrationsfunktion  $q$ .

$$q(z) = \frac{d_2(z)}{d_1(z)} \quad (2)$$

Streifenabstände und somit die Kalibrationsfunktion können experimentell mit Hilfe eines Geschwindigkeitsnormals bestimmt werden. Beim Profilsensor ist  $q(z)$  eineindeutig, was eine Umkehrung in  $z(q)$  und damit eine direkte Messung von  $z$  erlaubt. Unter den genannten Voraussetzungen einer senkrechten Partikeltrajektorie bestimmt sich  $q$  aus Glg.(1) und es folgt

$$q_{\perp}(z) = \frac{f_1}{f_2}. \quad (2a)$$

Die Dopplerfrequenzen  $f_1$  und  $f_2$  werden direkt gemessen. Ihr Verhältnis ist unabhängig von der Geschwindigkeit, weshalb auch die Positionsbestimmung davon unabhängig ist. Dies ist ein wesentlicher Vorteil des Sensors.

### Geradlinige, schräge Trajektorien mit Beschleunigung

Neben dem einfachsten Fall des senkrechten Einfalls eines Partikels sollen hier insbesondere schräge, aber geradlinige Trajektorien untersucht werden. Die Partikel dürfen dabei durchaus entlang dieser Bewegungsrichtung beschleunigt sein. Die Einschränkung auf Geradlinigkeit ist bei kleinen Messvolumen zulässig und reduziert die Komplexität des mathematischen Modells, welches wiederum Basis für die verwendete Signalverarbeitung ist. Ausgangspunkt für die Betrachtungen ist ein Modell für den Verlauf des Streifenabstandes entlang der optischen Achse. Grundlegende Rechnungen hierzu finden sich in [8]. Die Annahme einer linearen Streifenabstandsänderung mit Steigung  $c$  im Bereich des Kreuzungspunktes beider Laserstrahlen ist eine gute Näherung [3] und führt auf

$$d_i(z(t)) = c_i z(t) + d_{0i}, \quad i = \{1, 2\}. \quad (3)$$

Alle verwendeten geometrischen Größen beziehen sich auf die Anordnung in Abb. 1. Der Zeitpunkt  $t = 0$  soll dem Durchtritt des Partikels durch die optische Achse entsprechen. Aus der Intensitätsverteilung innerhalb des Interferenzbereiches ergibt sich die Phase  $\varphi$  des detektierten Dopplersignals zu

$$\varphi_i(t) = \frac{2\pi}{d_i(z(t))} x(t) = \frac{2\pi x(t)}{c_i z(t) + d_{0i}}. \quad (4)$$

Innerhalb des Messvolumens soll die Beschleunigung  $a$  eines Partikels als konstant betrachtet werden. Diese Näherung ist angesichts der kleinen Abmessungen des Messvolumens zulässig und die Beschreibung einer schrägen Trajektorie lautet

$$\begin{aligned} x &= x(t) = \frac{a_{x0}}{2} t^2 + v_{x0} t \\ z &= z(t) = x(t) \tan \alpha + z_0 \end{aligned} \quad (5)$$

mit  $\alpha$  als Winkel bzgl. der Senkrechten zur optischen Achse. Alle mit 0 indizierten Größen beziehen sich auf das Passieren der optischen Achse. Für die Bestimmung der Parameter schräger Trajektorien ist eine zeitaufgelöste Betrachtung unumgänglich. Aus der Phase in Glg.(4) leitet sich die Momentanfrequenz ab, aus der wiederum die zeitlichen Verläufe  $v_x(t)$  und  $q(t)$  entsprechend Glg.(2) hervorgehen. Mit den in Glg.(5) gemachten Annahmen ergeben sich diese letztlich in guter Näherung zu

$$v_{xi}(t) = v_x(t) = \frac{f_i(t) \overline{f_i} d_i(t)^2}{v_{x0}}, \quad (6)$$

## 2.4

$$q(t) = \sqrt{\frac{f_1(t) \overline{f_1}}{f_2(t) \overline{f_2}}}. \quad (7)$$

Überstrichene Frequenzen stellen den jeweiligen zeitlichen Mittelwert dar. Die in Glg.(6) enthaltene Größe  $v_{x0}$  erhält man durch Anwendung von Glg.(1, 2a) auf die Frequenzmittelwerte, da hier im zeitlichen Mittel der Formalismus eines konventionellen LDA auf die  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit anwendbar ist. Mit Hilfe von Glg.(6, 7) sowie dem über  $q(t)$  bekannten zeitlichen Verlauf  $z(t)$  lassen sich nun der mittlere Ort sowie laterale und axiale Geschwindigkeitskomponente und die Beschleunigung eines Partikels berechnen.

### Burst-Modell

Die Modellierung der Burstsignale erlaubt die Berechnung der minimal möglichen Messunsicherheiten des Sensors über die Bestimmung der Cramér-Rao-Schranke (CRLB). Weiterhin ermöglicht dies eine Charakterisierung des verwendeten Signalverarbeitungsverfahrens hinsichtlich der Genauigkeit und Robustheit zunächst ohne experimentellen Aufwand. Die eigentliche Form des Burstsignals ist unabhängig von  $d_0$  und es bietet sich die Einführung relativer Größen für Geschwindigkeit, Beschleunigung und Ort nach Glg.(8) an.

$$(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{v}, \tilde{a})^T(t) = \frac{1}{d_0} (x, z, v, a)^T(t) \quad (8)$$

Die geradlinige Trajektorie  $\mathbf{r}(t) = (x(t), z(t))^T$  sei wie in Glg.(5) definiert und liefert in Verbindung mit Glg.(4) die Phase des Signals. Die Signalbreite  $\sigma$  kann durch die Anzahl der Streifen  $N_f$  innerhalb des Messvolumendurchmessers und dem Streifenabstand  $d_0$  ausgedrückt werden. Mit der empirischen Annahme  $4\sigma = N_f d_0$  ergibt sich das normierte Burstmodell letztlich zu

$$\tilde{m}_i(t) = \exp\left(-\frac{16\tilde{x}(t)^2}{N_f^2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{1+c_i\tilde{z}(t)}\tilde{x}(t)\right) + n_i(t). \quad (9)$$

Dem Signal sei Gauß-verteilt Rauschen  $n(t)$  mit der äquivalenten Rauschspannung  $\sigma_n$  überlagert. Man beachte, dass konstant beschleunigte Partikel beim Profilsensor eine nichtlineare Frequenzänderung verursachen, entgegen einer linearen beim konventionellen LDA [5].

### Messbarkeit der lateralen Beschleunigungskomponente

Hier soll allgemein betrachtet werden, inwieweit sich Beschleunigungen mit einem konventionellen LDA messen lassen. Die Ergebnisse treffen gleichermaßen auf den Profilsensor zu. Beim LDA steht nur die relativ kurze Strecke  $D$  des Messvolumendurchmessers für eine Messung zur Verfügung. Die Geschwindigkeit muss sich darin signifikant ändern, um Frequenzänderungen über die Messunsicherheit der Frequenz hinaus detektieren zu können. Die messbare Beschleunigung hängt dabei stark von der mittleren Geschwindigkeit eines Partikels ab. Für eine Abschätzung kann die Beschleunigung als konstant angenommen werden. Ein Partikel bewege sich senkrecht zur optischen Achse und trete mit der Geschwindigkeit  $v_{x,inc}$  in das Messvolumen ein. Dann lässt sich die relative Geschwindigkeitsänderung bei Austritt aus dem Messvolumen angeben als

$$\left. \frac{\Delta v_{x,inc}}{v_{x,inc}} \right|_{min} = \frac{a_{x0,min} \Delta t}{v_{x,inc}} \cong 4\sqrt{2} \frac{\sigma_{v_{x0}}}{v_{x0}}. \quad (10)$$

Für die Messung der Beschleunigung sind mindestens zwei Geschwindigkeitsmessungen eines einzelnen Partikels zu verschiedenen Zeitpunkten erforderlich. Damit die Geschwindigkeiten unterschieden werden können, sollte deren Differenz mindestens  $2\sqrt{2}\sigma_{vx}$  betragen.

Misst man tatsächlich zwei diskrete Geschwindigkeiten, steht je Messung praktisch nur ein halbes Burstsinal zur Verfügung, wodurch sich die relative Messunsicherheit für  $v_x$  in etwa nochmals verdoppelt. Diese Annahmen führen auf die Näherung in Glg.(10). Für die noch enthaltene Laufzeit  $\Delta t$  muss dabei gelten

$$\frac{a_{x0,min}}{2} \Delta t^2 + v_{x,inc} \Delta t = N_f d_0 \quad (11)$$

und man erhält eine Beziehung zwischen minimal messbarer Beschleunigung und Geschwindigkeit:

$$|a_{x0,min}| \cong \frac{v_{x,inc}^2}{2N_f d_0} \left[ \left( 4\sqrt{2} \frac{\sigma_{v_{x0}}}{v_{x0}} + 1 \right)^2 - 1 \right]. \quad (12)$$

Möchte man beispielsweise die Erdbeschleunigung mit einer Abweichung von etwa 10%, d.h.  $a_{x0,min} = 0,98m/s^2$ , durch Vermessung eines fallenden Objekts bestimmen, sollte nach Glg.(12) die Geschwindigkeit beim Eintritt in das Messvolumen  $0,21 m/s$  nicht überschreiten. Das entspricht einer geringen Fallhöhe von  $2,2 mm$ . Dieser Rechnung liegt ein typischer Wert der relativen Messunsicherheit für  $v_x$  von  $4 \cdot 10^{-4}$  zugrunde bei einem Messvolumendurchmesser von  $100 \mu m$ . Man beachte, dass die messbare Beschleunigung und somit deren Messunsicherheit mit dem Quadrat der Geschwindigkeit skaliert und in turbulenten Strömungen mit hoher Reynoldszahl durchaus Werte in der Größenordnung  $\sigma_a \sim 10^3 m/s^2$  annehmen kann.

### Minimal erreichbare Messunsicherheiten (CRLB)

Im hergeleiteten Modell Glg.(9) werden die Parameter Geschwindigkeit, Beschleunigung und Ort als veränderlich angesehen. Die Komponenten sind dabei über den Einfallswinkel  $\alpha$  verknüpft, so dass sich die Menge der Parameter reduziert. Diese lassen sich zu einem Parametervektor

$$\vec{p} = (\tilde{v}_{x0}, \tilde{a}_x, \tilde{z}_0, \tan \alpha)^T \quad (13)$$

zusammenfassen. Die Cramér-Rao-Grenze gibt die minimal mögliche Messunsicherheit für den jeweiligen Parameter bei Verwendung eines unverzerrten Schätzers an [1]. Hierfür muss die sogenannte Fisher-Informations-Matrix berechnet werden, in die die partiellen Ableitungen des Modells nach den Parametern eingehen. Man beachte, dass je Partikel zwei Messungen aufgrund der zwei Streifensysteme vorgenommen werden. Unter Verwendung der zugehörigen rauschfreien Modelle  $m_1$  und  $m_2$  ergeben sich die Elemente der Fisher-Informations-Matrix  $J$  deshalb zu

$$J_{ij} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{\partial \tilde{m}_1}{\partial p_i} \bigg|_k \frac{\partial \tilde{m}_1}{\partial p_j} \bigg|_k + \frac{\partial \tilde{m}_2}{\partial p_i} \bigg|_k \frac{\partial \tilde{m}_2}{\partial p_j} \bigg|_k \right). \quad (14)$$

In Glg.(14) repräsentiert  $\sigma_n$  die äquivalente Rauschspannung und  $N$  die Anzahl der Abtastwerte. Für die Untersuchung der Messunsicherheit sollen verschiedene SNR-Werte in  $dB$  vorgegeben werden. Es ist sinnvoll, die mittlere Signalleistung des Burstsinals als Bezugsgröße zu nutzen. Die Rauschleistung kann dann mit

$$\sigma_n^2 = 10^{-\frac{SNR}{10}} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{m}(t)^2 dt \quad (15)$$

vorgegeben werden. Es wird hier davon ausgegangen, dass das SNR in beiden Kanälen gleich ist. Anschließend wird  $J$  numerisch invertiert und die Messunsicherheiten der einzelnen Parameter bilden dann die Hauptdiagonale der entstandenen Matrix  $J^{-1}$ .

$$\tilde{\sigma}_{p_i}^2 = J^{-1}_{ii} \quad (16)$$

## 2.6

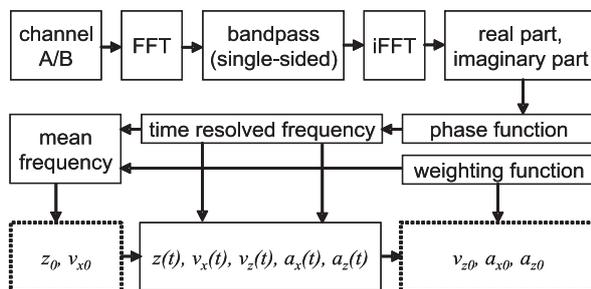
Über die gegenseitige Abhängigkeit der Einzelkomponenten ergeben sich außerdem die Messunsicherheiten für die axialen Größen zu

$$\begin{aligned}\sigma_{\tilde{v}_{z0}} &= \sqrt{(\tilde{v}_{x0} \sigma_{\tan \alpha})^2 + (\sigma_{\tilde{v}_{x0}} \tan \alpha)^2} \\ \sigma_{\tilde{a}_z} &= \sqrt{(\tilde{a}_x \sigma_{\tan \alpha})^2 + (\sigma_{\tilde{a}_x} \tan \alpha)^2}\end{aligned}\quad (17)$$

Mit diesem Verfahren ist es nun möglich, verschiedene Parameter für Geschwindigkeit und Beschleunigung vorzugeben, die minimalen Messunsicherheiten zu berechnen und mit dem Signalverarbeitungsverfahren zu vergleichen.

### Signalverarbeitung

Beim Profilsensor müssen zwei Kanäle ausgewertet werden. Auswertung bedeutet hierbei zum einen die Koinzidenzprüfung bzgl. des zeitlichen Auftretens beider Signale sowie eine zeitaufgelöste Frequenzanalyse. Die Signalerkennung findet hier ausschließlich im Frequenzbereich statt, da entsprechende Verfahren im Zeitbereich relativ zeitaufwändig sind, dieses Verfahren jedoch eine online-Messung ermöglichen soll [9]. Die zeitaufgelöste Frequenzmessung liefert in Verbindung mit Glg.(6, 7) direkt den zeitlichen Verlauf der  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit sowie die Orts-Zeitfunktion eines Partikels. Daraus lassen sich alle gesuchten Parameter ableiten. Ein Burstsignal äußert sich im Frequenzbereich als Peak und kann als bandbegrenzt betrachtet werden. Eine adaptive Bandpassfilterung bewirkt eine deutliche Verbesserung des SNR, während die Information über das Nutzsignal nahezu vollständig erhalten bleibt. Zur Beurteilung der Signalqualität wird das im Frequenzbereich geschätzte SNR herangezogen.



**Abb. 2:** Schematische Darstellung der Signalverarbeitung. Nach der einseitigen Bandpassfilterung beider Signale und Rücktransformation erfolgt die Auswertung analog der Quadratur-Demodulationstechnik [10]. Die gestrichelten Boxen enthalten die gesuchten Parameter.

Transformiert man das halbseitige, bandpassgefilterte Spektrum in den Zeitbereich zurück, erhält man das zum Burst gehörige analytische Signal  $m_A = m_{Ar} + im_{Ai}$ . Der Vorgang entspricht im Prinzip der Hilberttransformation und die weitere Analyse erfolgt analog der QDT [10]. Momentanamplitude und -frequenz des Burstsignals ergeben sich demnach zu

$$\begin{aligned}A(t) &= \sqrt{m_{Ar}(t)^2 + m_{Ai}(t)^2} \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \arg(m_A(t))\end{aligned}\quad (18)$$

Die gesuchten Parameter (Abb. 2) ergeben sich direkt oder indirekt über die Mittelung der Zeitfunktionen. Idealerweise sollte diese gewichtet ausgeführt werden, da die Signalqualität und somit die Verlässlichkeit der Frequenzschätzung von der Mitte des Burst nach außen hin abnimmt. Eine geeignete Wichtungsfunktion ist hier das Produkt aus den Amplitudenfunktionen beider Kanäle mit der Dimension einer Leistung. Hierbei wird auch Fällen Rechnung getragen, in denen die Bursts beider Kanäle zeitlich leicht gegeneinander verschoben sind oder die Amplituden aufgrund von Beschleunigung verzerrt sind. Das beschriebene Verfahren ist sehr effizient, da für die zeitaufgelöste Frequenzanalyse im

Wesentlichen nur zwei FFTs benötigt werden und die Amplitudenform des Signals auf die Frequenzschätzung nur unwesentlichen Einfluss hat.

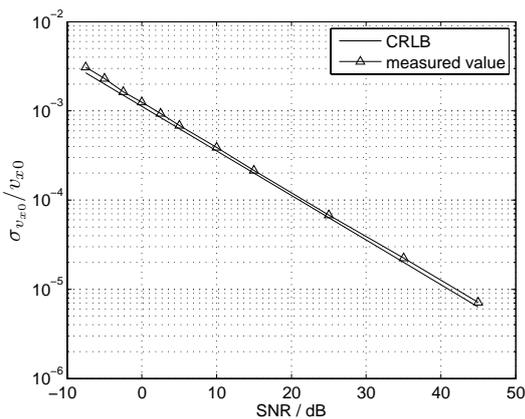
### Bewertung der Signalverarbeitung

Zur Charakterisierung der Signalverarbeitung werden empirische Ergebnisse zur Messunsicherheit mit denen der Theorie nach Cramér-Rao verglichen. Mit Hilfe des Modells Glg.(9) wurden hierfür zu jedem Parametersatz aus Tabelle 1 2000 Burstsignale generiert und ausgewertet.

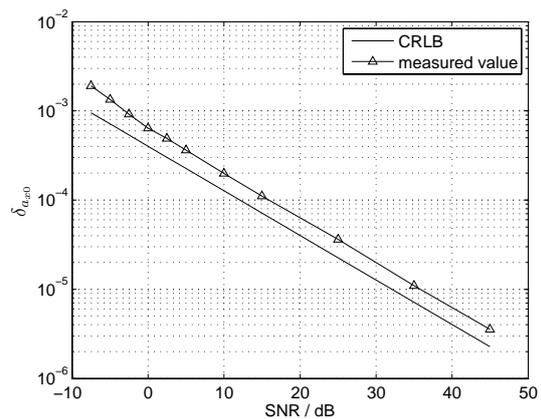
	$\tilde{v}_0 / s^{-1}$	$\tilde{a}_0 / s^{-2}$	$\alpha / ^\circ$	$d_0 / \mu m$	$ c $	$N_f$	$N$	$SNR / dB$
	1/2/3	$10^6$	0/0/2 <sup>10</sup>	0/30/0	3	$10^{-3}$	20	1024
								-7,5...45

**Tabelle 1:** Parametersätze der simulierten Burstsignale.

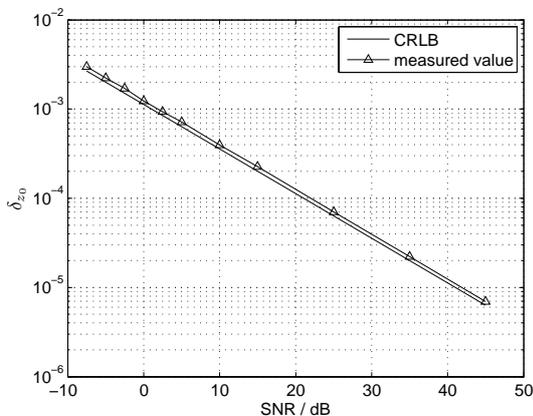
Nachfolgend sind die Ergebnisse vergleichend in Abhängigkeit vom SNR des Signals dargestellt. Alle Abbildungen beziehen sich auf die normierten Größen nach Glg.(8). Abb. 3-4 zeigen das Verhalten für die laterale Geschwindigkeitskomponente  $v_{x0}$  und deren abgeleiteten Parameter  $a_{x0}$ . mit den Vorgaben aus Tabelle 1(1,3). Aufgrund der Unabhängigkeit dieser Messunsicherheiten von der Steigung  $c$  ist die Betrachtung einer zur optischen Achse senkrechten Trajektorie ausreichend.



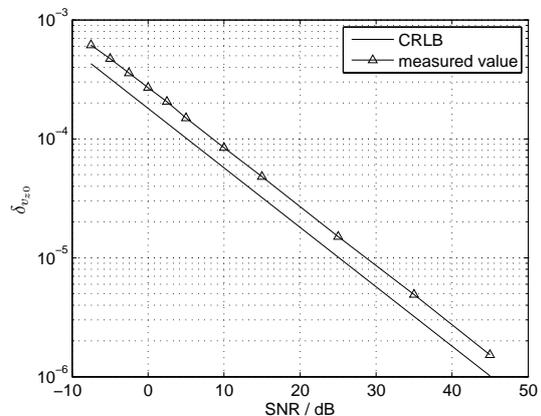
**Abb. 3:** Standardabweichung der lateralen Geschwindigkeitskomponente bezogen auf die Geschwindigkeit. (Tab. 1(1))



**Abb. 4:** Standardabweichung der lateralen Beschleunigungskomponente bezogen auf das Geschwindigkeitsquadrat. (Tab. 1(3))



**Abb. 5:** Produkt aus  $c$  und Standardabweichung der Position. (Tab. 1(1))



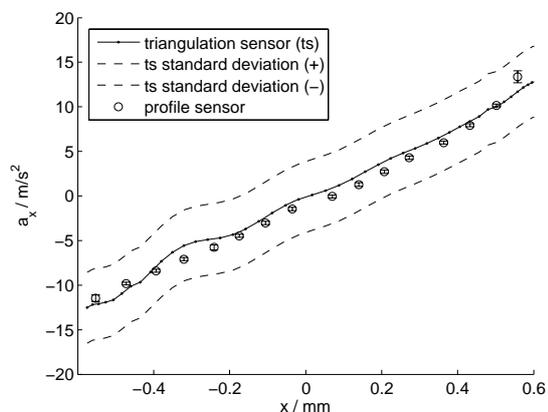
**Abb. 6:** Produkt aus  $c$  und Standardabweichung der axialen Geschwindigkeitskomponente bezogen auf die Gesamtgeschwindigkeit. (Tab. 1(2))

## 2.8

Zur Bewertung der Messunsicherheit der axialen Geschwindigkeit  $v_{z0}$  wurde eine schräge Trajektorie gemäß Tabelle 1(2) gewählt. Für axiale Größen empfiehlt sich die Darstellung des Produktes aus Steigung  $c$  der Streifenabstandsfunktion und der entsprechenden Größe selbst, da dieses konstant ist für verschiedene  $c$ . Abb. 5-6 zeigen die Messunsicherheit für die Position  $z_0$  eines Partikels und für deren abgeleitete Größe  $v_{z0}$ . Die empirisch ermittelten Messunsicherheiten unterscheiden sich von der CRLB um einen Faktor deutlich kleiner 2 und liegen damit sehr dicht an der theoretischen Grenze. Die Anwendung der Hilberttransformation beschränkte sich bisher auf Burstsignale mit gutem SNR [5, 6]. Hier hingegen kann keine signifikante Verschlechterung bis zum Minimalwert der Vorgabe von  $-7.5 \text{ dB}$  SNR festgestellt werden. Im vorliegenden Verfahren wird eine Verbesserung der Ergebnisse durch die Verbesserung des SNR mittels Bandpassfilterung und durch eine gewichtete Mittelung der zeitabhängigen Größen erreicht. Demzufolge kann auch nur eine Aussage über mittlere Werte entsprechend dem zugrunde liegenden Modell gemacht werden.

### Messung

Ziel der hier vorgestellten Messung ist der Nachweis der Anwendbarkeit des Sensors und der genannten Auswertemethoden. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Messbarkeit von lateraler Beschleunigung und axialer Geschwindigkeitskomponente des Profilsensors. Zur Verifikation wurde die Vermessung eines harmonischen Oszillators gewählt, da hier berechenbare Beschleunigungen auftreten und die Vermessung mit einem Triangulations-sensor als unabhängiges Vergleichsinstrument möglich ist. Durch Verkippung und entsprechende Positionierung des Sensors sind alle betrachteten Größen frei einstellbar.



**Abb. 7:** Gemessene Beschleunigung des harmonischen Oszillators. Gemessen wurde entlang der Schwingungsrichtung  $x$  um die Ruhelage  $x = 0$ . Der vorgegebene Trajektorienwinkel von  $42^\circ$  wurde mit  $45^\circ$  und einer Standardabweichung von  $1,5^\circ$  gemessen.

Das Messvolumen beinhaltete 20 Streifen, deren mittlerer Abstand  $2,8 \mu\text{m}$  betrug bei einer Steigung von  $c = \pm 0,8 \cdot 10^{-3}$ . Abb. 7 zeigt das Messergebnis für eine schräge Trajektorie mit gleichzeitiger Beschleunigung. Der Sensor wurde entlang der Oszillationsrichtung  $x$  verschoben und damit die Absolutwerte variiert. Die Messung mit dem Profilsensor deckt sich sowohl mit den Ergebnissen des Triangulationssensors, als auch mit den Vorgaben für die Trajektorie. Dieses Experiment dient gleichzeitig als Nachweis für die Anwendbarkeit auf turbulente Strömungen, da die Signale lediglich skalieren und sich im Wesentlichen nur in der Frequenz unterscheiden.

### Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, dass neben Geschwindigkeiten auch die Beschleunigung eines Partikels mit dem Profilsensor gemessen werden kann. Zu beachten ist die Abhängigkeit der Mess-

unsicherheit vom Quadrat der mittleren Geschwindigkeit, wodurch letztlich ein Minimalwert der Beschleunigung erforderlich wird. Das vorgestellte Signalverarbeitungsverfahren ist sowohl effizient, als auch robust gegenüber geringer Signalqualität. Die dem verwendeten Modell zugrunde liegenden Parameter der Partikeltrajektorie konnten daher für alle vorgegebenen Werte des SNR bis hin zu  $-7,5 \text{ dB}$  mit einer Messunsicherheit nahe der theoretischen Cramér-Rao Grenze bestimmt werden. Praxisrelevant sind Signale mit einem SNR von  $\approx 10 \text{ dB}$ . Das Verhältnis aus empirischer und theoretischer Messunsicherheit war dabei stets deutlich kleiner als 2. Die Messunsicherheit axialer Komponenten wird hier direkt durch die Steigung der Streifensysteme beeinflusst, während laterale Komponenten davon unberührt bleiben. Der Profilsensor eignet sich dementsprechend sehr gut für die ortsaufgelöste Messung der Lagrangeschen Beschleunigung. Die hohe Ortsauflösung im Mikrometerbereich erlaubt dabei die Untersuchung von Strömungen mit großer Reynoldszahl.

### Danksagung

Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die finanzielle Unterstützung im Rahmen des Projektes CZ 55/20-1 zur Turbulenzforschung.

### Literatur

- [1] Albrecht HE, Borys M, Damaschke N, Tropea C. Laser Doppler and phase Doppler measurement techniques. Berlin Heidelberg (Germany): Springer-Verlag; 2003.
- [2] Czarske J, Büttner L, Razik T, Müller H. Boundary layer velocity measurements by a laser Doppler profile sensor with micrometre spatial resolution. Meas Sci Technol 2002;13:1979-89.
- [3] Büttner L, Czarske J. Determination of the axial velocity component by a laser-Doppler velocity profile sensor. J Opt Soc Am A 2006;23(2):444-54.
- [4] Büttner L, Czarske J. Vermessung schräger Teilchentrajektorien mit dem LDA-Geschwindigkeitsprofilsensor. 13. GALA-Fachtagung "Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik"; 2005; Karlsruhe (Germany): Deutsche Gesellschaft für Laser-Anemometrie; 2006.
- [5] Lehmann B, Nobach H, Tropea C. Measurement of acceleration using the laser Doppler technique. Meas Sci Technol 2002;13:1367-81.
- [6] Kinzel M, Nobach H, Tropea C, Bodenschatz E. Messung Lagrange'scher Beschleunigungen mittels Laser-Doppler-Anemometrie. 14. GALA-Fachtagung "Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik"; 2006; Karlsruhe (Germany): Deutsche Gesellschaft für Laser-Anemometrie; 2006.
- [7] Shirai K, Pfister T, Büttner L, Czarske J et al. Highly spatially resolved velocity measurements of a turbulent channel flow by a fiber-optic heterodyne laser-Doppler velocity-profile sensor. Experiments in Fluids 2006;40(3):473-81.
- [8] Miles PC. Geometry of the fringe field formed in the intersection of two Gaussian beams. Applied Optics 1996;35(30):5887-95.
- [9] Bayer C, Voigt A, Shirai K, Büttner L, Czarske J. Interferometrischer Laser-Doppler-Feldsensor zur Messung der Geschwindigkeitsverteilung von komplexen Strömungen. tm-Technisches Messen 2007;74(4):224-34.
- [10] Müller H, Strunck V, Dopheide D. The application of quadrature demodulation techniques for the investigation of flows. Flow Meas Instrum 1997;7(3/4):237-45.